

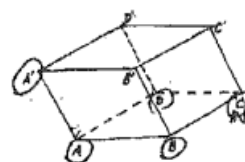
2016-2017 学年第二学期期中考试 A 卷

一、(每题 7 分，共 35 分)

1. 设 $(a \times b) \cdot c = 5$ ，求 $[(a - b) \times (b - c)] \cdot (c + a)$.

2. 一平行六面体示意图如图，已知坐标 $A(1, 0, 0)$ ， $B(5, 9, 2)$ ，

$D(3, 5, 7)$ ， $A'(1, -2, 6)$ ，求该平行六面体的体积.



3. 求过点 $(-1, 2, 3)$ 且垂直于直线 $\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$ 且平行于平面 $7x + 8y + 9z + 10 = 0$ 的直线方程.

4.(1)验证直线 $L_1: \begin{cases} x+2y-2z=5 \\ 5x-2y-z=0 \end{cases}$ 与直线 $L_2: \frac{x+3}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4}$ 平行; (2)求经过 L_1 与 L_2 的平面方程.

5.求直线 $L: \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在 xoy 平面上的投影直线 L_1 方程, 并求 L_1 绕 oy 轴旋转所成的旋转曲面的方程.

二、(每题 8 分, 共 24 分)

1.讨论 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在原点的可微性.

2. 设 $f(x, y) = \int_0^{xy} e^{-t^2} dt$, 求 $\frac{x}{y} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{y}{x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

3. 设 $z = f(3x - y) + g(x, xy)$, 其中 $f(t)$ 二阶可导, $g(u, v)$ 具有连续二阶偏导, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

三、(每题 7 分, 共 35 分)

1. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{a}{n}\right)$ 收敛性 ($a > 0$, 常数).

2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

3. 将函数 $f(x) = \arctan \frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

4. 设常数 $a > 0$, $a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{a+x^n} dx$, 谈论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 是条件收敛, 绝对收敛, 发散? 还是敛散性与 a 有关? 请给出论证.

5. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2-2x, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$, $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$, $-\infty < x < +\infty$, 其中

$$a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos n\pi x dx \quad (n=0, 1, 2, \dots), \text{ 求 } S\left(-\frac{9}{2}\right).$$

四、叙述定理(可微的充分条件), 并证明这个定理.(6 分)

2017-2018 学年第二学期期中考试试卷

1、求 p 值使得矢量 $\vec{a} = 2\vec{i} + p\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ 和 $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$ 共面.

2、求过点 $P(1, 2, 5)$ 与直线 $L: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + z = 3 \end{cases}$ 的距离

3、证明直线 $L_1: \frac{x+3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{4}$ 和直线 $L_2: \frac{x-8}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{2}$ 相交, 并写出由 L_1, L_2 决定的平面方程

4、求直线 $L_1: \begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$ 在平面 $\pi: x-4y-8z+12=0$ 上的投影直线方程。

5. 求曲线 $C: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+z=a \end{cases}$ 在 xOy 平面的投影曲线 L 的方程，并求出 L 与 C 的参数方程

6. 求直线 $x-1=y=z$ 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程

7. 设 a 为非负实数, 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$ 的敛散性

8. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$ 是否收敛, 若收敛, 判断是绝对收敛还是条件收敛

9. 确定幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n + \sqrt{n}) (x-1)^n$ 的收敛半径及收敛域

10. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) x^{2n}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的和函数 $S(x)$.

11. 求函数 $f(x) = \ln(1 - x - 2x^2)$ 的麦克劳林展开式，并指出其收敛区间。

12. 将 $f(x) = x, 0 \leq x \leq \pi$ 展开为正弦级数，并写出其和函数。

13. 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均为正项数列，试证明：

(1) 对任意的正整数 n ，若 $a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} \leq 0$ ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

(2) 对任意的正整数 n ，若 $b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geq \delta$ 其中 δ 为正常数，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

微积分甲(II)18-19学年期中题目

1. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}$ 的敛散性.
2. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 的值.
3. 将 $f(x) = \arcsin x$ 展开成 x 的幂级数, 并求 $f^{(99)}(0)$.
4. 已知级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = -1$ 处条件收敛, 试求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+1) x^n$ 的收敛半径. (要求给出理由)
5. 设 $f(x) = e^x (0 \leq x \leq 2\pi)$, 将 $f(x)$ 展开成周期 2π 的傅里叶级数.
6. 求原点关于平面 $\pi: 2x - 3y + 4z + 29 = 0$ 的对称点的坐标.
7. 通过点 $M_1(1, 1, 1)$ 和 $M_2(2, 3, 4)$, 作与平面 $x + y - z = 1$ 垂直的平面, 求此平面方程.
8. 求过点 $A(-1, 0, 4)$ 且平行于平面 $3x - 4y + z = 0$, 又与直线 $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ 相交的直线方程.
9. 求直线 $L: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$ 绕 Oz 轴旋转所成的旋转曲面的方程.
12. 设函数 $u = u(x, y)$ 对新变量 ξ, η 具有二阶连续偏导数, 求 a 的值, 使得在变换 $\xi = x + ay, \eta = x - y$ 下, 将方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 简化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

微积分甲(II)20-21学年度期中题目

1. 设直线 L_0 的参数方程为 $x = -t, y = 3 + t, z = 1 + t$, 其中 t 为参数, 在直线 L_0 上求一点 C , 使得以点 $A(0, 0, 1), B(0, 1, 0)$ 和 C 为顶点的三角形面积 S 最小.
2. 求过点 $M_0(3, 2, -4)$ 且平行于平面 $\pi_0: 3x - 2y - z + 6 = 0$, 又与直线 $L_0: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+2}{3}$ 相交的直线 L 的方程.
3. 求通过直线 $L: \begin{cases} 2x + y - 4z + 1 = 0 \\ x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$ 且与平面 $\pi_0: x + 2y - z + 3 = 0$ 垂直的平面 π 的方程.
4. 设定直线 L_0 过坐标原点 O 以及点 $M_0(1, 1, 1)$, 而 L 是过坐标原点 O 的动直线, 且直线 L_0 与 L 的夹角始终为 $\frac{\pi}{4}$, 求动直线 L 上任一点 $M(x, y, z)$ 满足的方程, 并求该方程所表示的曲面与平面 $y + z = 2$ 的交线 Γ 在 xOy 面上的投影曲线所围的平面有界区域的面积 S .
5. 设函数 $u(x, y, z) = (\arctan \frac{y}{z})^x$, 求全微分 $du|_{(1, \sqrt{3}, 3)}$.
6. 设函数 $f(t)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上具有二阶导数, 又函数 $u(x, y, z) = f(r)$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 记 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, 把 Δu 表示成 r 的函数.
7. 设函数 $z = x^2 f(xy, \frac{y}{x})$, 其中 f 有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
8. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} \sin(x^2+y^2) & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$,
(1) 求 $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$; (2) 证明 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微.
9. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} x^n$ 的收敛域及和函数 $S(x)$.
10. 设函数 $f(x) = \frac{x-1}{3+2x-x^2}$, (1) 把 $f(x)$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数, 并写出展开式成立的范围;
(2) 求 $f^{(n)}(1) (n=0, 1, 2, \dots)$.
11. 设 $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 是以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数, 且 $f(x) = \begin{cases} x & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < |x| \leq \pi \end{cases}$, 求傅里叶系数 $a_0, a_n, b_n (n=1, 2, 3, \dots)$ 及 $S\left(-\frac{9\pi}{2}\right)$.
12. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p - (-1)^n}\right) (0 < p < 1)$ 的敛散性 (要求讨论是绝对收敛, 条件收敛还是发散).

浙江大学 2021-2022 学年 春夏 学期

《微积分（甲）II》课程期中考试试卷

1. 求过点 $M_0(1, -1, 1)$ 且与直线 $l: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$ 垂直的平面方程.
2. 求直线 $l: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 绕 z 轴旋转一周所得曲面 S 的方程; 并指出曲面 S 是什么曲面.
3. 位于点 $A(1, 2, 3)$ 处的点光源, 沿方向 $\vec{v} = (-1, 5, 3)$ 发出光线. 求此光线经过平面 $S: 2x + y + 2z - 1 = 0$ 反射后, 其反射光线所在直线的方程.
4. 将 $f(x) = \arctan \frac{1-x}{1+x}$ 展开成关于 x 的幂级数, 并计算 $f^{(11)}(0)$ 的值.
5. 设 $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & (0 \leq x < 1) \\ -x+2 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$, 且 $b_n = \int_0^2 f(x) \sin \frac{\pi}{2} nx dx (n = 1, 2, 3, \dots)$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{\pi}{2} nx$, 求: $S(-5)$ 的值, 并说明理由.

6. 设 $\{a_n\}$ 是单调递增的有界数列.

(1) 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1}^2 - a_n^2)$ 收敛;

(2) 举例说明级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$ 不一定收敛.

7. 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1}$ 的收敛域与和函数.

8. 设 $u = \frac{1}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 证明:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

9. 设 $f(x, y)$ 可微, 且对任意 $t, x, y \in \mathbb{R}$, 有 $f(tx, ty) = t^2 f(x, y)$ 成立. $M_0(1, -2, 3)$ 为曲面 $z = f(x, y)$ 上的点, 若 $f'_x(-1, 2) = 4$, 求 $dz|_{M_0}$.

10. 求幂级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2}{n-1} x^n$ 的收敛域与和函数, 并计算 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)2^{n-1}}$ 的值.

11. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^{2022}y}{x+y} & (x^2 + y^2 \neq 0) \\ 0 & (x^2 + y^2 = 0) \end{cases}$

(1) 求 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处的偏导数;

(2) 据理说明 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处是否连续.

12. 证明直线 $l_1: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{2}$ 与 $l_2: \frac{x-5}{4} = \frac{y-6}{3} = \frac{z-4}{5}$ 异面; 并求异面直线 l_1, l_2 的公垂线的方程.

13. 已知函数 $f(x)$ 的周期为 2π , 且 $0 \leq x \leq 2\pi$ 时有 $f(x) = \frac{1}{4}x(2\pi - x)$.

(1) 将 $f(x)$ 展开成 Fourier 级数;

(2) 证明: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

微积分甲(II) 22-23 学年期中题

1. 求由空间四点 $A(1, 1, 0)$, $B(4, 4, 5)$, $C(11, 9, 8)$ 和 $D(1, -1, 5)$ 构成的四面体体积.
2. 求通过直线 $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{4}$ 且平行于直线 $L_2: \frac{x-8}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{2}$ 的平面方程.
3. 求直线 $f(x) = \begin{cases} x+y-z=1, \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $\pi: x+y+z=0$ 上的投影直线方程.
4. 求直线 $x-1=y=z$ 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程.
5. 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 y \ln(x^2 + y^2)$.
6. 设函数 $y=y(x)$. $z=z(x)$ 是由方程 $z=x^2+y^2$ 和 $x^2+2y^2+3z^2=1$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$.
7. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|xy|} \sin \ln(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ 求 $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$, 并讨论 f 在点 $(0, 0)$ 处的可微性.
8. 设 $u=f(x, y)$ 有连续的二阶偏导数, 引用新的自变量 $s=x+y, t=x-y$ 化简方程
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

9. 判别级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$ 的敛散性, 并判别时绝对收敛还是条件收敛.

10. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) x^{2n}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的和函数 $S(x)$.

11. 求函数 $f(x) = \frac{1}{1-x-2x^2}$ 的麦克劳林展开式, 并指出其收敛区间.

12. 将 $f(x) = x, 0 \leq x \leq \pi$ 展开为正弦级数, 并写出其和函数.

13. 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均为正项数列, 试证:

(i) 对任意的正整数 n , 若 $a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} \leq 0$, 且 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_n}$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.

(i) 对任意的正整数 n , 若 $b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geq \delta, \delta$ 为正常数, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

微积分甲(II)/H (II) 23-24 学年期中题

1. 求过点 $(-3, 2, 5)$ 且与两平面 $x - 4z = 3$ 和 $3x - y + z = 1$ 平行的直线方程.

2. 求直线 $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{3}$ 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面的方程.

3. 已知空间四个点 $P_1(1, 0, 1)$, $P_2(0, -1, 2)$, $P_3(1, a, -2)$, $P_4(-1, b, 0)$.

(1) 当 a, b 满足什么条件时, P_1, P_2, P_3, P_4 四点共面.

(2) 若 $\triangle P_1 P_2 P_3$ 的面积为 $\frac{3}{2}\sqrt{6}$, 求常数 a 的值.

4. 求通过直线 $L: \begin{cases} x - y + z - 1 = 0, \\ 2x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$ 的两个互相垂直的平面, 其中一个平面与直线

$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ 平行.

5. 求极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{xy}$.

6. 设 $z = u(x, y)e^{ax+by}$, 且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$, 试确定常数 a, b , 使函数 $z = z(x, y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0.$$

7. 已知 $f(u, v)$ 存在二阶连续偏导, 且 $df|_{(1,1)} = 3du + 4dv$, 若 $y = f(\cos x, 1 + x^2)$,

计算 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$ 的值.

8. 设 $f(x, y) = |x - y|\varphi(x, y)$, 其中 $\varphi(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 邻域内连续.

(1) $\varphi(x, y)$ 在什么条件下, 偏导数 $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$ 存在;

(2) $\varphi(x, y)$ 在什么条件下, $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.

9. 判别级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+|x|}}$ 的敛散性, 并判别其为绝对收敛还是条件收敛.

10. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$.

11. 将函数 $f(x) = x - 1 (0 \leq x \leq 2)$ 展开成周期为 4 的余弦级数, 并由此求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

12. 将函数 $f(x) = \frac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

13. 已知 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

(1) 求 $f'(x)$ 的表达式.

(2) 证明: $f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = \frac{\pi^2}{6}$. ($0 < x < 1$)