

2016-2017 学年第二学期期中考试 A 卷参考答案

一、(每题 7 分, 共 35 分)

1. 【解析】 $[(a-b) \times (b-c)] \cdot (c+a) = [(a-b) \times b - (a-b) \times c] \cdot (c+a)$

$$= (a \times b - a \times c + b \times c) \cdot (c+a) = (a \times b) \cdot (c+a) - (a \times c) \cdot (c+a) + (b \times c) \cdot (c+a)$$

$$= 2(a \times b) \cdot c = 10.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题七 矢量代数与空间解析几何 第二部分 数量积 向量积 混合积

2. 【解析】由题意 $\overrightarrow{AD} = (2, 5, 7)$, $\overrightarrow{AB} = (4, 9, 2)$, $\overrightarrow{AA'} = (0, -2, 6)$, 那么有

$$V = |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AA'}| = \left| \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} \right| = 60.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题七 矢量代数与空间解析几何 第二部分 数量积 向量积 混合积

3. 【解析】设直线的方向向量为 $s = (4, 5, 6)$, 平面的法向量为 $n = (7, 8, 9)$, 显然所求直线既垂直于 s , 又垂直于 n , 因此所求直线的方向向量为

$$s_1 = s \times n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-3, 6, -3) \parallel (1, -2, 1)$$

因此所求直线的方程为 $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{1}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题七 矢量代数与空间解析几何 第四部分 空间直线及其方程

4. 【解析】(1)验证两直线的方向向量平行即可: 直线 L_1 的方向向量:

$$s_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-6, -9, -12) \parallel (2, 3, 4)$$

直线 L_2 的方向向量为 $s_2 = (2, 3, 4)$, 显然 $(-3, 0, 1)$ 不在直线 L_1 上, 因此两者并不重合, 因此两直线平行.

(2)取 L_1 上一点 $A(0, \frac{5}{6}, -\frac{5}{3})$, L_2 上一点 $B(-3, 0, 1)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (-3, -\frac{5}{6}, \frac{8}{3})$, 那么平面

的法向量为 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{s} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3 & -\frac{5}{6} & \frac{8}{3} \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \left(-\frac{34}{3}, \frac{52}{3}, -\frac{22}{3}\right) \parallel (34, -52, 22)$, 因此平面方程

为 $34(x+3) - 52y + 22(z-1) = 0$, 整理得到 $34x - 52y + 22z + 80 = 0$.

【考点延伸】《考试宝典》专题七 矢量代数与空间解析几何 第三部分 平面及其方程 第四部分 空间直线及其方程

5. 【解析】在 L 中消去 z 得到: $2x+1=0$, 因此直线 L_1 方程为 $\begin{cases} 2x+1=0 \\ z=0 \end{cases}$, 绕 oy 轴旋转得到一

柱面, 方程为 $\pm 2\sqrt{x^2+z^2} = \pm 1 \Rightarrow x^2+z^2 = \frac{1}{4}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题七 矢量代数与空间解析几何 第五部分 曲面及其方程 5.2 旋转曲面

二、(每题 8 分, 共 24 分)

1. 【解析】有 $f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$, 同理 $f_y(0, 0) = 0$, 那么

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{f(x, y) - xf_x(0, 0) - yf_y(0, 0)}{\rho} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

取路径 $y = kx$, 那么 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{2kx^2}{(1+k^2)x^2} = \frac{2k}{1+k^2}$, 则原极限不存在, 则函数 $f(x, y)$

在 origin 处不可微.

【考点延伸】《考试宝典》专题八 多元微分及其以应用 第三部分 全微分

2. 【解析】依据题意有 $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{-x^2y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{-x^2y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ye^{-x^2y^2} \cdot (-2xy^2) = -2xy^3e^{-x^2y^2}$;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xe^{-x^2y^2} \cdot (-2x^2y) = -2x^3ye^{-x^2y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{-x^2y^2} + ye^{-x^2y^2}(-2yx^2) = (1-2x^2y^2)e^{-x^2y^2}$$

$$\text{因此 } \frac{x}{y} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{y}{x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x^2y^2e^{-x^2y^2} + 2(2x^2y^2 - 1)e^{-x^2y^2} - 2x^2y^2e^{-x^2y^2}$$

$$= -2e^{-x^2y^2}.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 多元微分及其以应用 第二部分 偏导数

3. 【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = 3f'(3x-y) + g_1 + yg_2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3f''(3x-y) + xg_{12} + g_2 + xyg_{22}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题八 多元微分及其以应用 第二部分 偏导数

三、(每题 7 分, 共 35 分)

1. 【解析】 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{a}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{a^2}{2} > 0$, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{a}{n}\right)$ 与级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 有相

同的敛散性, 而级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 因此原级数收敛.

【考点延伸】《考试宝典》专题十一章 无穷级数 第二部分 常数项级数的审敛法

2. 【解析】 ① 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2}}{\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}} \right| = x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$, 当 $x = \pm 1$ 时, 得到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$,

根据莱布尼茨判别法知, 该级数收敛, 因此收敛域为 $[-1, 1]$.

② 令 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} \Rightarrow \frac{s(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$, $\left[\frac{s(x)}{x} \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$, 两边积分得到 $s(x) = x \arctan x$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的和函数为

$s(x) = x \arctan x$.

【考点延伸】《考试宝典》专题十一章 无穷级数 第三部分 幂级数

3. 【解析】 有 $f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)^2} \cdot \frac{-4}{(1+2x)^2} = -2 \cdot \frac{1}{1 + (2x)^2} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{2n}$, 因此

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt + f(0) = \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

令 $x = \frac{1}{2}$, 所以 $0 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{2n+1} \cdot \frac{1}{4^n} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题十一章 无穷级数 第四部分 函数展开成幂级数

4. 【解析】 ① 显然 $a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{a+x^n} dx$ 关于 n 是单调减少的, 因为被积函数关于 n 单调减少, 且积分上限也关于 n 单调减少, 所以整个积分值必然是随 n 单调减少的趋势, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 由交错级数敛

散性的判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛.

②根据积分中值定理, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{a+x^n} dx}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \sqrt{a+\xi_n^n}}{\frac{1}{n}} = \sqrt{a}$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

有相同的敛散性, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 条件收敛, 其敛散性与 a 无关.

【考点延伸】《考试宝典》专题十一章 无穷级数 第二部分 常数项级数的审敛法

5. 【解析】由于 $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$, $-\infty < x < +\infty$, 可知 $T=2$, 且 $f(x)$ 为偶函数, 则

$$S\left(-\frac{9}{2}\right) = S\left(\frac{1}{2}\right), \text{ 利用狄利克雷收敛定理可知 } S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{2}+0\right) + f\left(\frac{1}{2}-0\right)}{2} = \frac{3}{4}.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一章 无穷级数 第五部分 傅里叶级数

四、【解析】可微的充分条件: 设函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点的某个领域上存在偏导数, 并且偏导数在 (x_0, y_0) 点连续, 那么 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点处可微.

证: 首先我们有 $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)]$

$+ [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \Delta x + f_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta y$, 其中

$0 < \theta_1, \theta_2 < 1$, 由于 f_x, f_y 在 (x_0, y_0) 点处连续, 所以

$$f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) = f_x(x_0, y_0) + o(1)$$

$$f_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f_y(x_0, y_0) + o(1)$$

其中 $o(1)$ 表示当 $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0$ 时的无穷小量. 于是

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y + o(1) \Delta x + o(1) \Delta y$$

$= f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$, 即 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点处可微.

【考点延伸】《考试宝典》专题八 多元微分及其以应用 第三部分 全微分

2017-2018 学年第二学期期中考试试卷参考答案

一、

1、【解析】若 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面，则应有 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$

$$\text{由题列 } (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & p & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2p - 1 = 0 \text{ 则 } p = \frac{1}{2}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题七 2.3 向量的混合积

2、【解析】先求直线的方向向量，设其为 $\vec{v}$

则 $\vec{v} \perp (1, 1, -1)$ 且 $\vec{v} \perp (2, 0, 1)$

此时取 $\vec{v} = (1, 1, -1) \times (2, 0, 1) = (1, -3, -2)$

对直线方程，令 $x=1$ ，解得 $z=1, y=1$ ，即直线上有一点为 A (1, 1, 1)

且 $\overrightarrow{AP} = (0, 1, 4)$

$$\text{从而点 P 到直线的距离 } d = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \right| = \frac{3\sqrt{182}}{14}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题七 2.2 两个向量的向量积

3、【解析】

由题， L_1 的方向向量为 $\vec{v}_1 = (5, 2, 4)$ ， L_2 的方向向量为 $\vec{v}_2 = (3, 1, 2)$ ，

(可以联立得 L_1, L_2 的方程有解，说明两直线相交)

(这里利用 $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = 0$ 说明)

且 L_1 过点 $P_1(-3, -1, 2)$ ， L_2 过点 $P_2(8, 1, 6)$ ，则 $\overrightarrow{P_1P_2} = (11, 2, 4)$

又 $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = (0, 2, -1)$

则 $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = 0$

且显然 $\vec{v}_1$ 与 $\vec{v}_2$ 不平行，从而 L_1 与 L_2 相交

由于 L_1 与 L_2 决定的平面的法向量应与 L_1 与 L_2 的方向向量均垂直

因此取平面的法向量为 $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = (0, 2, -1)$

而平面过 $P_1(-3, -1, 2)$, 则平面的方程为 $0(x+3) + 2(y+1) - (z-2) = 0$

即 $2y - z + 4 = 0$

【考点延伸】《考试宝典》专题七 【易错考点】【3-2】 求平面方程

4、【解析】

平面束方程法, 所有过 L 的平面方程可写为

$\lambda(x+5y+z) + \mu(x-z+4) = 0$ (λ, μ 不同时为0)

即 $(\lambda + \mu)x + 5\lambda y + (\lambda - \mu)z + 4\mu = 0$

此时要求一个与平面 π 垂直的方程

则两者的法向量也应垂直, 则有 $(\lambda + \mu, 5\lambda, \lambda - \mu) \cdot (1, -4, -8) = 0$ 有

$$\lambda + \mu - 20\lambda - 8\lambda + 8\mu = 0 \quad \lambda = \frac{1}{3}\mu$$

代入平面束方程有 $\frac{4}{3}\mu x + \frac{5}{3}\mu y - \frac{2}{3}\mu z + 4\mu = 0$

且此时 $\mu \neq 0$, 则可写成 $4x + 5y - 2z + 12 = 0$

则所求投影直线方程为
$$\begin{cases} x - 4y - 8z + 12 = 0 \\ 4x + 5y - 2z + 12 = 0 \end{cases}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题七 4.1 空间直线的一般方程

5、【解析】

在 xOy 平面上有 $z=0$ 写投影曲线时不应有 z 项

又曲线 C 上有 $x+z=a$ 则 $z=a-x$, 将其代入第一个等式

即有 $x^2 + y^2 + (a-x)^2 = a^2$

从而投影曲线 L 的方程为
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (a-x)^2 = a^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

L 的第一个式子可转化成 $2x^2 - 2ax + y^2 = 0$

$$2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\text{则 } L \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos \theta \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} a \sin \theta \\ z = 0 \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$C \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos \theta \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} a \sin \theta \\ z = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cos \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

【考点延伸】《考试宝典》专题七 6.2 空间曲线在坐标面上的投影
6、【解析】

设所求旋转曲面上一点 $P(x, y, z)$

对应旋转前直线上一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$

由于绕 y 轴旋转，则两点到 y 轴距离相同，有 $x^2 + z^2 = x_0^2 + z_0^2$

且同时 $y = y_0$

又 P_0 在直线上满足 $x_0 - 1 = y_0 = z_0$

$$\text{从而 } \begin{cases} x_0 - 1 = y_0 = y \\ z_0 = y_0 = y \end{cases}$$

因此 $x_0^2 + z_0^2 = (y + 1)^2 + y^2 = x^2 + z^2$

从而旋转曲面方程为 $x^2 + z^2 = 2y^2 + 2y + 1$

【考点延伸】《考试宝典》专题七 5.2 旋转曲面

7. 【解析】

$a = 0$ 时 级数即 $\sum_{n=1}^{\infty} 0$ ，必收敛；

$a = 1$ 时，级数转化为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 由等比级数形式可知其收敛

$a > 0$ 且 $a \neq 1$ 时，令 $a_n = \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$ ，则 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{1+a^{n+1}}$

当 $0 < a < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1+a^{n+1}} = a < 1$ ($a^{n+1} \rightarrow 0$)

由比值判别法可知, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

当 $a > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1+a^{n+1}} = 0$ ($a^{n+1} \rightarrow \infty$)

由比值判别法可知, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

综上, 当 $a \geq 0$ 时 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$ 始终收敛

【考点延伸】《考试宝典》 专题十一 2.1 正项级数及其审敛法

8. 【解析】

设 $f(x) = \frac{1}{x - \ln x}, x \geq 1$

则 $f'(x) = \frac{1-x}{x(x-\ln x)^2} \leq 0$ 且不恒为 0

则 $f(x)$ 在 $x \geq 1$ 时为减函数

则对 $a_n = \frac{1}{n - \ln n}$ $\{a_n\}$ 为递减的

又由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 从而由 leibniz 判别法

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$ 收敛

再考虑 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \ln n}$ 由于 $\frac{1}{n - \ln n} > \frac{1}{n}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \ln n}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$ 为条件收敛

【考点延伸】《考试宝典》 专题十一 2.2 绝对收敛与条件收敛

9 【解析】

令 $a_n = 2^n + \sqrt{n}$ 幂级数写成 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + \sqrt{n}} = 2$$

$$(\sqrt[n]{2^n} < \sqrt[n]{2^n + \sqrt{n}} < \sqrt[n]{2^n + 2^n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^{n+1}} = 2)$$

则收敛半径为 $\frac{1}{2}$

则幂级数在 $x-1 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 时必绝对收敛, 此时 $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$

考虑边界处, $x-1 = -\frac{1}{2}$ 时 $x = \frac{1}{2}$

此时幂级数写成 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{\sqrt{n}}{2^n}\right)$ 而 $n \rightarrow \infty$ 时 $(-1)^n \left(1 + \frac{\sqrt{n}}{2^n}\right)$ 极限不存在

所以不收敛;

$x-1 = \frac{1}{2}, x = \frac{3}{2}$, 此时幂级数写成 $\sum_{n=1}^{\infty} 1 + \frac{\sqrt{n}}{2^n}$

$n \rightarrow \infty$ 时 通项的极限为 1, 不为 0, 故级数发散

综上 收敛半径为 $\frac{1}{2}$, 收敛域为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 3.2 幂级数及其收敛性

10. 【解析】

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) x^{2n} = S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} = \frac{x^2}{1-x^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}, x \in (-1, 1)$$

$$\text{令 } T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} \quad \text{则 } T(0)=0$$

$$x \neq 0 \text{ 时 } T(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\text{而} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \frac{x^2}{1-x^2}, \text{ 且 } x=0 \text{ 时 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 0$$

从而

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{1}{x} \cdot \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2} dt = \frac{1}{x} \cdot \int_0^x \frac{1}{1-t^2} - 1 dt \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) - 1 dt = \frac{1}{2x} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - 1 \quad (x \neq 0) \end{aligned}$$

带回 $S(x)$ 表达式则有

$$S(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1-x^2} - \frac{1}{2x} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 3.3 幂级数的运算

11. 【解析】

$$f(x) = \ln(1-x-2x^2) = \ln(1+x) + \ln(1-2x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (1+(-2)^n)}{n} x^n$$

$$\text{设 } a_n = \frac{(-1)^{n-1} (1+(-2)^n)}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n (1+(-2)^{n+1})}{n+1}}{\frac{(-1)^{n-1} (1+(-2)^n)}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \left| \frac{1+(-2)^{n+1}}{1+(-2)^n} \right| = 2$$

则收敛半径为 $\frac{1}{2}$

所以收敛区间为 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (按绝对收敛的开区间理解)

若理解成(收敛区间=收敛域)

$$x = -\frac{1}{2} \text{ 时, 原级数变为 } \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n \cdot 2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$$

由莱布尼茨判别法易知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 收敛

且 $\frac{1}{n \cdot 2^n} < \frac{1}{2^n}$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ 也收敛, 从而原级数收敛;

$$x = \frac{1}{2} \text{ 时 原级数变为 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n \cdot 2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$$

$$\text{而由于 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n} \text{ 绝对收敛, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散}$$

有原级数发散

$$\text{综上, 收敛域为 } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 4.1 函数展开成幂级数

12. 【解析】

先将 $f(x)$ 延拓成周期为 2π 的奇函数

且由正弦级数时, $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$

对 $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = -\frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x d \cos nx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \left(x \cos nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) = -\frac{2}{n\pi} \left(\pi \cos n\pi - \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n} \end{aligned}$$

$$\text{由狄利克雷收敛定理, } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n} \sin nx, 0 \leq x < \pi$$

$$\text{故 } f(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx, & 0 \leq x < \pi \\ \pi, & x = \pi \end{cases}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 5.2 函数展开成傅里叶级数

13. 【解析】

(1) 由题, 有 $a_n b_n \leq a_{n+1} b_{n+1}$ 则有 $a_1 b_1 \leq a_2 b_2 \leq \dots \leq a_n b_n$ 成立

$$\text{则 } a_n \geq \frac{a_1 b_1}{b_n} \text{ 又由于级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} \text{ 发散}$$

$$\text{且 } a_1 b_1 \text{ 为固定值 由比较判别法知 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 发散}$$

(2) 由题有 $a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} \geq \delta a_{n+1}$ 对 $\forall n$ 均成立

$$\text{则有 } \sum_{i=1}^n (a_i b_i - a_{i+1} b_{i+1}) \geq \sum_{i=1}^n \delta a_{i+1}$$

$$\text{即 } a_1 b_1 - a_{n+1} b_{n+1} \geq \sum_{i=1}^n \delta a_{i+1} \quad \text{令 } \sum_{i=1}^n a_i = S_n$$

$$\text{有 } a_1 b_1 - a_{n+1} b_{n+1} \geq \delta (S_{n+1} - a_1)$$

$$\text{则 } \delta S_{n+1} \leq a_1 b_1 + \delta a_1 - a_{n+1} b_{n+1} \leq a_1 b_1 + \delta a_1$$

$$S_{n+1} \leq a_1 + \frac{1}{\delta} a_1 b_1, \quad \text{即 } \{a_n\} \text{ 的部分和 } \{S_n\} \text{ 有界} \quad \text{从而 } \{a_n\} \text{ 收敛} \quad (a_n > 0)$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 2.1 正项级数及其审敛法

浙江大学 2018-2019 学年 春夏 学期

《微积分（甲）II》课程期中考试答案

来源：微信公众号“路老师的 nonsense collection”

1. ① 设 $a_n = \frac{1}{1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}$ 利用定积分想法,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot (\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{a_n}\end{aligned}$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\int_0^1 \sqrt{x} dx} = \frac{1}{\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1} = \frac{3}{2}$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 敛散性相同, 又由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}$ 收敛

② 当 n 为偶数时, $1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n} > \sqrt{\frac{n}{2}} + \dots + \sqrt{n} > \frac{n}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{2}}$
($\frac{n}{2}$ 项)

n 为奇数时, $1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n} > \sqrt{\frac{n+1}{2}} + \dots + \sqrt{n} > \frac{n+1}{2} \sqrt{\frac{n+1}{2}} > \frac{n}{2} \sqrt{\frac{n}{2}}$
($\frac{n+1}{2}$ 项)

即对 $\forall n$, 有 $1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n} > \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot n^{\frac{3}{2}}$ 成立

则 $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}} < \frac{2\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}$, 又由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}$ 收敛

3. 注意到 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = [1+(-x^2)]^{-\frac{1}{2}}$ (利用 $(1+x)^\alpha$ 的展开)

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) \cdots (-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-x^2)^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \quad (\text{双阶乘即隔一个相乘})$$

且 $f(0) = 0$

则 $f(x) = \int_0^x f'(t) dt + f(0) = \int_0^x 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n} dt$

$$= x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!! (2n+1)} x^{2n+1}$$

而 $f^{(99)}(0)$ 应为 $f(x)$ 幂级数展开式中 x^{99} 的系数再乘 $99!$

对应 x^{99} 项系数为 $\frac{97!!}{98!! \cdot 99}$

则 $f^{(99)}(0) = \frac{97!! \cdot 99!}{98!! \cdot 99} = \frac{97!! \cdot 98!}{98!!} = (97!!)^2$

4. 由于 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $x=-1$ 处条件收敛,

则其收敛半径 $R \geq 1$, 否则若 $R < 1$, 只在 $[-R, R]$ 内可能收敛

而此时 $-1 \notin [-R, R]$, 则应该发散, 这与题意矛盾.

又若 $R > 1$, 则级数在 $(-R, R)$ 内绝对收敛, 而此时 $-1 \in (-R, R)$

$x=-1$ 时应绝对收敛, 也与题意矛盾.

所以, 收敛半径 $R=1$.

又 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (n+1) x^n$ 可以看成 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$ 的求导, 则二者收敛半径相同

又 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$ 的收敛半径为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, 这与 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径相同.

均为 1, 从而级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (n+1) x^n$ 的收敛半径为 1

5. 先求对应的傅里叶系数, 由于周期为 2π ,
所以积分上下限也可以取为 0 与 2π .

$$\text{此时 } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x dx = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{n} e^x d \sin nx \\ &= \frac{1}{n\pi} (e^x \sin nx \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin nx de^x) = -\frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} e^x \sin nx dx \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{n} e^x d \cos nx = \frac{1}{n^2\pi} (e^x \cos nx \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos nx de^x) \\ &= \frac{1}{n^2\pi} (e^{2\pi} - 1 - \int_0^{2\pi} e^x \cos nx dx) \quad \triangleq \int_0^{2\pi} e^x \cos nx dx = I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } a_n &= \frac{1}{\pi} I = \frac{1}{n^2\pi} (e^{2\pi} - 1 - I) \\ \text{解得 } I &= \frac{e^{2\pi} - 1}{n^2 + 1} \quad \text{从而 } a_n = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi(n^2 + 1)} \quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

而在计算过程中有 $a_n = -\frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} e^x \sin nx dx$

$$\text{则 } b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \sin nx dx = -\pi a_n = \frac{n(e^{2\pi} - 1)}{\pi(n^2 + 1)}$$

又由于 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 内连续,

$$\text{从而 } 0 < x < 2\pi \text{ 时 } f(x) = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{2\pi} - 1}{(n^2 + 1)\pi} \cdot (\cos nx - n \sin nx)$$

而在 $x=0$ 与 $x=2\pi$ 处,

$$\text{傅里叶级数取值为 } \frac{f(0) + f(2\pi)}{2} = \frac{e^{2\pi} + 1}{2}$$

6 设对称点 $P(x_0, y_0, z_0)$

则 OP 与平面 π 垂直

又平面 π 的法向量 $\vec{n} = (2, -3, 4)$

$\therefore$ 有 $OP \parallel \vec{n}$ $\therefore$ 直线 OP 的方向向量可取为 $(2, -3, 4)$

即 OP 方程为 $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{4} = t$

又 OP 中点 $Q(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}, \frac{z_0}{2})$ 在平面 π 上

且有 $\begin{cases} x_0 = 2t \\ y_0 = -3t \\ z_0 = 4t \end{cases}$

$$\therefore 2t + \frac{9}{2}t + 8t + 29 = 0$$

$$t = -2$$

即 $Q(t, -\frac{3}{2}t, 2t)$

$\therefore P(-4, 6, -8)$

7 由题 $\vec{M_1M_2} = (1, 2, 3)$

设所求平面法向量为 $\vec{n}$, 由题, $\vec{n} \perp \vec{M_1M_2}$

且 $\vec{n} \perp (1, 1, -1)$

$$\therefore \vec{n} = \vec{M_1M_2} \times (1, 1, -1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-5, 4, -1)$$

$\therefore$ 所求平面方程为 $-5(x-1) + 4(y-1) - (z-1) = 0$

$$\text{即 } 5x - 4y + z - 2 = 0$$

8 (法 I) (平面束) 过 A 与已知平面平行的平面 π 方程为 $3(x+1) - 4y + z - 4 = 0$

过已知直线的平面束 (先改写已知直线为 $\begin{cases} x+1=y-3 \\ y-3=\frac{z}{2} \end{cases}$)

$$\text{为 } \lambda(x+1-y+3) + \mu(y-3-\frac{z}{2}) = 0$$

把 A(-1, 0, 4) 代入上式, 有 $3\lambda - 5\mu = 0$ 化简上式即得 $10x - 4y - 3z + 22 = 0$

$$\therefore \text{所求直线为 } \begin{cases} 3x - 4y + z - 1 = 0 \\ 10x - 4y - 3z + 22 = 0 \end{cases}$$

(法 II) 所求直线与已知直线交于 B. 设 B(a, a+4, 2a+2) (在已知直线上)

$\therefore \vec{AB} = (a+1, a+4, 2a+2)$ $\vec{AB}$ 与平面 $3x - 4y + z = 0$ 平行

$$\therefore \vec{AB} \perp (3, -4, 1) \quad \text{即 } 3(a+1) - 4(a+4) + 2a+2 = 0 \quad \therefore a = 15$$

$$\therefore \vec{AB} = (16, 19, 28) \quad \therefore \text{所求直线方程为 } \frac{x+1}{16} = \frac{y}{19} = \frac{z-4}{28}$$

9 设旋转面上一点 M(x, y, z). 过 M 作与 z 轴垂直的面 L 交于 M₁,

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \quad \text{则有 } \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = x^2 + y^2 \\ z_1 = z \end{cases}$$

$$\text{又 } M_1 \text{ 在 } L \text{ 上 } \therefore \text{有 } \begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 = 0 \\ y_1 - z_1 - 1 = 0 \end{cases} \quad \therefore \text{有 } \begin{cases} x_1 = -2z_1 - 1 = -2z - 1 \\ y_1 = z_1 + 1 = z + 1 \end{cases}$$

$$\therefore \text{有 } x^2 + y^2 = (-2z-1)^2 + (z+1)^2$$

$$\text{即旋转曲面方程为 } x^2 + y^2 = 5z^2 + 6z + 2$$

$$10. \frac{\partial z}{\partial x} = y(e^x + y^2)^{y-1} \cdot e^x$$

$$\text{又 } z = e^{y \ln(e^x + y^2)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= e^{y \ln(e^x + y^2)} \cdot \left(\frac{y \cdot 2y}{e^x + y^2} + \ln(e^x + y^2) \right) \\ &= (e^x + y^2)^y \left(\frac{2y^2}{e^x + y^2} + \ln(e^x + y^2) \right) \end{aligned}$$

$$11. \frac{\partial u}{\partial x} = f_1' + \frac{1}{y} f_2'$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = f_{12}'' \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) - \frac{1}{y^2} f_2' + f_{22}'' \cdot \frac{1}{y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) \\ &= -\frac{x}{y^2} f_{12}'' - \frac{x}{y^3} f_{22}'' - \frac{1}{y^2} f_2' \end{aligned}$$

$$12. \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = a \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (a-1) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

又由题知 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 可化简

$$(1+4a+3a^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (2+4(a-1)-6a) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \text{又由题知即 } \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

$$\text{从而 } 3a^2 + 4a + 1 = 0 \quad \Delta = 2 - 2a \neq 0 \quad \therefore a = -\frac{1}{3}$$

13. (1) 说明 $0 < a_n < 1$

(归纳法) 显然 $a_0 \in (0, 1)$
若 $n=k$ 时成立, $k \in \mathbb{N}$

则 $a_k \in (0, 1)$, $1 - a_k \in (0, 1)$

又 $a_{k+1} = a_k(1 - a_k)$

$\therefore a_{k+1} \in (0, 1)$ 成立

2 对 $\forall n$ 均有 $0 < a_n < 1$

又 $a_{n+1} = a_n(1 - a_n) < a_n \cdot 1$

$\therefore \{a_n\}$ 单调递减, 且有下界 0

$\therefore \{a_n\}$ 有极限, 且设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

$\therefore A = A(1 - A), A = 0$

由莱布尼兹定理, 则级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ 收敛

(2) $\because a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{1 - a_n}$$

$$\text{则 } \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{1 - a_n} < \frac{1}{1 - a_0} \quad (\text{对 } n \geq 1)$$

$$\text{又 } \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_0} = \frac{1}{1 - a_0}$$

$$\therefore \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0} < \frac{n}{1 - a_0} \quad (\text{累项相加})$$

$$\text{则 } \frac{1}{a_n} < \frac{n}{1 - a_0} + \frac{1}{a_0}$$

$$\therefore a_n > \frac{1}{\frac{n}{1 - a_0} + \frac{1}{a_0}}$$

$\therefore \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ 发散

$$\text{又 } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\frac{n}{1 - a_0} + \frac{1}{a_0}} \text{ 发散} \quad (\text{即看成 } \frac{1}{n})$$

浙江大学 2020-2021 学年 春夏 学期

《微积分（甲）II》课程期中考试答案

来源：微信公众号“路老师的 nonsense collection”

1. 此时设 $C(-t, 3+t, 1+t)$

由 A, B 坐标有 $\vec{AC} = (-t, 3+t, t)$, $\vec{AB} = (0, 1, -1)$

则三角形面积 $S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$

$$\text{又 } \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ -t & 3+t & t \end{vmatrix} = (2t+3, t, t)$$

$$\text{则 } S = \frac{1}{2} \sqrt{(2t+3)^2 + t^2 + t^2}$$

$$\text{此时考虑 } S^2 = \frac{1}{4} (2t+3)^2 + t^2 + t^2 = \frac{3}{4} (2t^2 + 4t + 3)$$

$$= \frac{3}{2} (t+1)^2 + \frac{3}{4}$$

从而 $t = -1$ 时 S^2 取最小值, 对应 S 也取最小值

此时 C 的坐标为 $(1, 2, 0)$, 对应 $S_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 过 M_0 与平面 π_0 平行的平面方程为

$$3(x-3) - 2(y-2) - (z+4) = 0 \quad \text{即 } 3x - 2y - z - 9 = 0$$

(对应法向量相同)

则 L 也在该平面上, 又 L 与 L_0 相交,

$$\text{联立 } \begin{cases} 3x - 2y - z - 9 = 0 \\ \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+2}{3} \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = 1 \end{cases}$$

即为 L 与 L_0 的交点坐标. 记该点为 $M_1(2, -2, 1)$

则 L 的一个方向向量 $\vec{r} = \overrightarrow{M_0M_1} = (-1, -4, 5)$

$$\text{从而直线 } L \text{ 的方程为 } \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+4}{5}$$

$$\text{(写成用 } M_1 \text{ 表达的 } \frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-1}{5} \text{ 也可)}$$

3. 利用平面束来考虑

过直线 L_0 的平面束方程为

$$\lambda(2x + y - 4z + 1) + \mu(x - 2y + z - 1) = 0. \quad \text{其中 } \lambda \text{ 与 } \mu \text{ 不同时为 } 0$$

$$\text{写成 } (2\lambda + \mu)x + (\lambda - 2\mu)y + (-4\lambda + \mu)z + (\lambda - \mu) = 0$$

$$\text{对应的法向量 } \vec{m} = (2\lambda + \mu, \lambda - 2\mu, -4\lambda + \mu)$$

$$\text{又 } \pi_0 \text{ 的法向量 } \vec{n}_0 = (1, 2, -1)$$

$$\text{由所求的垂直, 应有 } \vec{m} \cdot \vec{n}_0 = 0$$

$$\text{则 } 2\lambda + \mu + 2(\lambda - 2\mu) - (-4\lambda + \mu) = 0, \text{ 有 } 2\lambda = \mu$$

$$\text{令 } \lambda = 1 \text{ 则 } \mu = 2, \text{ 从而 } \vec{m} = (4, -3, -2)$$

$$\text{则所求平面 } \pi \text{ 的方程为 } 4x - 3y - 2z - 1 = 0$$

4. 首先 $\vec{OM_0} = (1, 1, 1)$, $\vec{OM} = (x, y, z)$ 分别为直线 L_0 与 L 的一个方向向量

又 L_0 与 L 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$

$$\text{则 } |\vec{OM_0} \cdot \vec{OM}| = |\vec{OM_0}| \cdot |\vec{OM}| \cdot \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\text{有 } |x+y+z| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

平方得 $2(x+y+z)^2 = 3(x^2+y^2+z^2)$, 即为 M 满足的方程.

$$\text{对应交线 } \begin{cases} 2(x+y+z)^2 = 3(x^2+y^2+z^2) \\ y+z=2 \end{cases}$$

往 xOy 平面上投影, 那么消去 z , (用 $2-y$ 代替 z)

$$\text{得到投影曲线 } \begin{cases} 2(x+2)^2 = 3(x^2+y^2+(2-y)^2) \\ z=0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\textcircled{1} \text{式转化为 } x^2 + 6y^2 - 8x - 12y + 4 = 0$$

$$\text{即 } (x-4)^2 + 6(y-1)^2 = 18, \quad \frac{(x-4)^2}{18} + \frac{(y-1)^2}{3} = 1$$

则投影曲线为一个椭圆, 中心在 $(4, 1)$ 处,

对应 $a = 3\sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$ (半长轴, 半短轴)

$$\text{从而面积 } S = \pi ab = 3\sqrt{6}\pi$$

$$5. \quad u(x, y, z) = \left(\arctan \frac{y}{z}\right)^x = e^{x \ln(\arctan \frac{y}{z})}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\arctan \frac{y}{z}\right)^x \cdot \ln \arctan \frac{y}{z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot \left(\arctan \frac{y}{z}\right)^{x-1} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{y^2}{z^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x \cdot \left(\arctan \frac{y}{z}\right)^{x-1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{y^2}{z^2}} \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)$$

当 $x=1, y=\sqrt{3}, z=3$ 时, 代入得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1, \sqrt{3}, 3)} = \frac{\pi}{6} \ln \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(1, \sqrt{3}, 3)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{9}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(1, \sqrt{3}, 3)} = \frac{1}{1 + \frac{3}{9}} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$\text{又 } du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } du \Big|_{(1, \sqrt{3}, 3)} &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1, \sqrt{3}, 3)} dx + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(1, \sqrt{3}, 3)} dy + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(1, \sqrt{3}, 3)} dz \\ &= \frac{\pi}{6} \ln \frac{\pi}{6} dx + \frac{1}{4} dy - \frac{\sqrt{3}}{12} dz \end{aligned}$$

6. 这里考虑把 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 这几项转化成 u 对 r 的偏导形式

$$\text{先考虑 } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{x}{r}$$

$$\text{又 } u(x, y, z) = f(r) \quad \text{从而 } \frac{\partial u}{\partial r} = f'(r)$$

$$\text{那么 } \frac{\partial u}{\partial x} = x \cdot \frac{f'(r)}{r}$$

$$\text{从而 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{f'(r)}{r} + x \cdot \frac{f''(r) \cdot r - f'(r)}{r^2} \cdot \frac{x}{r} \quad \leftarrow \text{(对应的 } \frac{\partial r}{\partial x} \text{)}$$

$$= \frac{f'(r)}{r} + \frac{x^2}{r^3} (rf''(r) - f'(r))$$

$$\text{由对称性, } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{f'(r)}{r} + \frac{y^2}{r^3} (rf''(r) - f'(r))$$

(轮换对称, 改变字母顺序不影响表达式成立)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{f'(r)}{r} + \frac{z^2}{r^3} (rf''(r) - f'(r))$$

$$\text{则 } \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$= \frac{3f'(r)}{r} + \frac{x^2+y^2+z^2}{r^3} (rf''(r) - f'(r))$$

$$= \frac{3f'(r)}{r} + \frac{1}{r} (rf''(r) - f'(r))$$

$$= f''(r) + \frac{2f'(r)}{r}$$

7. 对 $z = x^2 f(xy, \frac{y}{x})$, 由于 f 有二阶连续偏导, 有 $f''_{12} = f''_{21}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot (xf'_1 + \frac{1}{x}f'_2) = x^3 f'_1 + x f'_2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^3 \cdot (xf''_{11} + \frac{1}{x}f''_{12}) + x \cdot (xf''_{21} + \frac{1}{x}f''_{22})$$

$$= x^4 f''_{11} + 2x^2 f''_{12} + f''_{22}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = 3x^2 f'_1 + x^3 (y f''_{11} + y \cdot (-\frac{1}{x^2}) f''_{12}) + f'_2 + x (y f''_{21} + y \cdot (-\frac{1}{x^2}) f''_{22})$$

$$= 3x^2 f'_1 + f'_2 + x^3 y f''_{11} - \frac{y}{x} f''_{22}$$

8. (1) 用定义求解

$$f'_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{x^2} \sin x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1$$

类似地, $f'_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y^2}{y^2} = 1$

(2) 考虑 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow 0} \frac{\frac{x+y}{x^2+y^2} \sin(x^2+y^2) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 是否为0

上式变为 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow 0} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} - 1 \right)$ (有 $x+y$ 项考虑提出来)

而 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$, 且 $\left| \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{2}$

则 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow 0} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} - 1 \right) = 0$ (这里 $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy \leq x^2+y^2+x^2+y^2 = 2(x^2+y^2)$)
从而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微. (有界乘无穷小)

9. 令 $a_n = \frac{n^2}{n+1}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^2}{n+2}}{\frac{n^2}{n+1}} \right|$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{n^2(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+3n^2+3n+1}{n^3+2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{2}{n}} = 1$

则收敛半径 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{1} = 1$

考虑收敛域时考虑 $x = \pm 1$ 处

$x=1$ 时对应级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1}$, 此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1}$ 不存在, 故级数发散

$x=-1$ 时对应级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n+1}$, 此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n^2}{n+1}$ 也不存在, 故级数发散

从而幂级数收敛域为 $(-1, 1)$

再计算和函数, 此时要对 a_n 进行转化, $a_n = \frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2-1}{n+1} + \frac{1}{n+1}$
 $= (n-1) + \frac{1}{n+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n = S(x)$$

当 $x=0$ 时, $S(0)=0$

$$x \neq 0 \text{ 时, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad \hat{=} T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (-1 < x < 1)$$

$$\text{则 } T'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \quad \text{又 } T(0)=0,$$

$$\text{有 } T(x) = \int_0^x \frac{t}{1-t} dt = \int_0^x -1 + \frac{1}{1-t} dt = -x - \ln(1-x)$$

$$\text{又 } \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n - \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} - \frac{x}{1-x}$$

$$\text{又 } \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\text{则此时 } S(x) = x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} + \frac{T(x)}{x} = \frac{x^2}{(1-x)^2} - 1 - \frac{\ln(1-x)}{x}$$

$$\text{综上, } S(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{(1-x)^2} - \frac{\ln(1-x)}{x} - 1, & -1 < x < 0 \text{ 或 } 0 < x < 1 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$$10, (1) \text{ 令 } x-1=t, \quad x=t+1$$

$$f(x) = \frac{x-1}{3+2x-x^2} = \frac{t}{3+2(t+1)-(t+1)^2} = \frac{t}{4-t^2} = \frac{t}{(2+t)(2-t)}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2-t} - \frac{1}{2+t} \right)$$

$$\text{而 } \frac{1}{2-t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}t} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}t\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^{n+1}} \quad \left(\left|\frac{1}{2}t\right| < 1\right)$$

$$\frac{1}{2+t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}t} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{2}t\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{2^{n+1}}$$

(记住 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x| < 1$ 这个展开式)

$$\begin{aligned} \text{从而 } f(x) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{2^{n+1}} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[1-(-1)^n] t^n}{2^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[1-(-1)^n] (x-1)^n}{2^{n+2}} \end{aligned}$$

此时 $\left|\frac{x-1}{2}\right| < 1$, 有 $-1 < x < 3$.

($f(x)$ 展开式不带 $(-1)^n$ 也可写成 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n-1}}{2^{2n}}$)

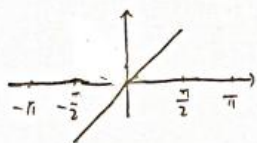
$$(2) \text{ 记 } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

$$\text{有 } \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = a_n.$$

$$\text{因此 } f^{(n)}(1) = n! \cdot a_n = n! \cdot \frac{[1-(-1)^n]}{2^{n+2}}$$

$$= \begin{cases} 0 & n=2m \\ \frac{(2m+1)!}{2^{2m+2}} & n=2m+1 \end{cases}$$

11. 注意到 $f(x)$ 为奇函数, 则对应 $a_0=0, a_n=0$ ($n=1, 2, 3, \dots$)



$$\begin{aligned} \text{则 } b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx \, dx \\ &= -\frac{2}{\pi} \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, d \cos nx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \left(x \cos nx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx \, dx \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{2}{n\pi} \left(\frac{\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \\ n \text{ 为偶 } \quad \sin \frac{n\pi}{2} &= 0 \\ \cos \frac{n\pi}{2} &= (-1)^{\frac{n}{2}-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n \text{ 为奇 } \quad \sin \frac{n\pi}{2} &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \\ \cos \frac{n\pi}{2} &= 0 \end{aligned} \quad \left(\begin{aligned} &\frac{(-1)^{k-1}}{2k}, \quad n=2k \\ &\frac{2 \cdot (-1)^{k-1}}{(2k-1)^2 \pi}, \quad n=2k-1 \end{aligned} \right), \quad k=1, 2, 3, \dots$$

而 $S(x)$ 周期也为 2π .

$$\begin{aligned} \text{有 } S(-\frac{9}{2}\pi) &= S(-\frac{5}{2}\pi) = S(-\frac{\pi}{2}) = \frac{f(-\frac{\pi}{2}-0) + f(-\frac{\pi}{2}+0)}{2} \\ &= \frac{0 + (-\frac{\pi}{2})}{2} = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

12. 由于 $1 + \frac{(-1)^n}{n^p + (-1)^n} = \frac{n^p}{n^p - (-1)^n}$

从而 $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p - (-1)^n}\right) = \ln \frac{n^p}{n^p - (-1)^n} = -\ln \frac{n^p - (-1)^n}{n^p}$

$= -\ln\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^p}\right)$ (虽然都是 $\ln(1+x)$ 形式, 但转化后
分母简单, 较易操作)

考虑对 $\ln$ 项, 由泰勒展开

上式 $= -\left(-\frac{(-1)^n}{n^p}\right) + \frac{1}{2n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right) = \frac{(-1)^n}{n^p} + \frac{1}{2n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$

当 $\frac{1}{2} < p < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$ 是绝对收敛的 (和 $\frac{1}{n^{2p}}$ 作比)

而此时由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$ 且 $\frac{1}{n^p}$ 随 n 递减

有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ 是条件收敛的.

从而相加的结果是条件收敛, 即原级数条件收敛;

当 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ 仍为条件收敛

但此时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$ 发散. (与 $\frac{1}{n}$ 作比)

从而相加结果发散, 即原级数发散.

综上, 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p - (-1)^n}\right)$,

$0 < p \leq \frac{1}{2}$ 时 其发散.

$\frac{1}{2} < p < 1$ 时 其条件收敛.

浙江大学 2021-2022 学年 春夏 学期

《微积分（甲）II》课程期中考试答案

来源：微信公众号“路老师的 nonsense collection”

1. 直线 l 的方向向量 $\vec{l} = (1, -1, 1) \times (3, -4, 2)$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = (2, 1, -1)$$

又所求平面与直线 l 垂直, 则所求平面法向量与直线 l 的方向向量平行, 故也可取为 $\vec{l}$

又因为所求平面过 $M_0(1, -1, 1)$

则所求平面方程为 $2(x-1) + (y+1) - (z-1) = 0$

即 $2x + y - z = 0$

2. 设直线 l 上一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 绕 z 轴旋转后对应点 $P(x, y, z)$

则 P 在曲面 S 上, 且有

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 \\ z = z_0 \end{cases}$$

又由 l 的方程可知, 有 $\frac{x_0-3}{1} = \frac{y_0-1}{2} = \frac{z_0}{-1}$

又 $z = z_0$, 则 $x_0 = -z + 3$, $y_0 = -2z + 1$

因此有 $x^2 + y^2 = (-z+3)^2 + (-2z+1)^2$

化简得 $x^2 + y^2 = 5z^2 - 10z + 10$, 即为曲面 S 的方程.

又 S 方程可化为 $x^2 + y^2 - 5(z-1)^2 = 5$,

则曲面 S 为单叶双曲面.

3. 设点 A 关于 S 的对称点为 $A_0(x, y, z)$ ($x \neq 1$)

有 $\vec{AA_0} \perp$ 平面 S , 且平面 S 的法向量 $\vec{n} = (2, 1, 2)$

则 $\vec{AA_0} \parallel \vec{n}$, 又 $A(1, 2, 3)$ 有 $\vec{AA_0} = (x-1, y-2, z-3)$

$$\text{则} \begin{cases} x-1=2(y-2) \\ x-1=z-3 \end{cases} \text{得} \begin{cases} y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \\ z=x+2 \end{cases}$$

由对称还有 A 与 A_0 到 S 的距离相等,

$$\text{即} \frac{|2 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|2x + y + 2z - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|2x + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + 2x + 4 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}}$$

$$\text{有} |9 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{2}| \text{ 解得 } x=1 \text{ (舍)} \text{ 或 } x=-3$$

$$\text{则 } A_0(-3, 0, -1)$$

再求光线的入射点, 由题可知入射光线所在直线

$$\text{的方程为 } \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{3} = t, t \in \mathbb{R}$$

则只需求其与 S 的交点.

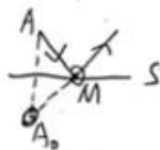
$$\text{又可将直线方程转化为} \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 5t + 2 \\ z = 3t + 3 \end{cases}$$

$$\text{代入到 } S \text{ 的方程中, 有 } 2(-t+1) + (5t+2) + 2(3t+3) - 1 = 0$$

$$9t + 9 = 0, t = -1 \text{ 对应 } x=2, y=-3, z=0$$

即入射点 $M(2, -3, 0)$

又反射光线所在直线过 A_0



即反射光线所在直线方程就为直线 A_0M 的方程

$$\vec{A_0M} = (5, -3, 1), \text{ 则所求直线方程 } \frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z}{1}$$

4. 对 $f(x) = \arctan \frac{1-x}{1+x}$, 先求导, 有 $f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2}$
 $= -\frac{1}{1+x^2}$ (去掉 $\arctan$ 这种大框架, 简化运算)

利用 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad (-1 < x < 1)$

则 $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n$, 此时 $-1 < -x^2 < 1$ 有 $-1 < x < 1$

则 $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^{2n}$, 且 $f(0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

有 $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$
 $= \frac{\pi}{4} + \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} t^{2n} dt$
 $= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \int_0^x t^{2n} dt$
 $= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, 此时收敛半径为 1

再考虑边界值, $x=1$ 时, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n+1}$ 收敛.

则 $f(x)$ 收敛域为 $(-1, 1]$

即 $f(x)$ 展开为 x 的幂级数为 $f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \cdot x^{2n+1}$, $-1 < x \leq 1$

又由于 $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!}$

x^{11} 的系数为 $\frac{(-1)^6}{11} = \frac{1}{11} = \frac{f^{(11)}(0)}{11!}$

有 $f^{(11)}(0) = \frac{11!}{11} = 10!$

5. 易知 $S(x)$ 为奇函数, 则要对 $f(x)$ 进行奇延拓考虑,

令 $g(x)$ 为 $f(x)$ 进行奇延拓后的函数, 则 $g(x)$ 的周期为 4, 且 $g(x) = -g(-x)$

且对 $g(x)$ 来说其傅里叶级数 $B_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \sin \frac{n\pi}{2} x dx = b_n$

(由于在 $[0, 2]$ 内 $g(x) = f(x)$)

则由狄利克雷收敛定理, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{2} x = \frac{g(x+0) + g(x-0)}{2}$

且 $S(x)$ 周期也为 4

$$\begin{aligned} \text{从而 } S(-5) &= S(-1) = -S(1) = -\frac{g(1+0) + g(1-0)}{2} \\ &= -\frac{f(1+0) + f(1-0)}{2} \\ &= -\frac{(1+2) + (2+1)}{2} = -2 \end{aligned}$$

6. (1) 设 $S_n = \sum_{k=1}^n (a_{k+1}^2 - a_k^2)$

$$\begin{aligned} &= (a_{n+1}^2 - a_n^2) + (a_n^2 - a_{n-1}^2) + \cdots + (a_2^2 - a_1^2) \\ &= a_{n+1}^2 - a_1^2 \end{aligned}$$

由于数列 $\{a_n\}$ 单调递增且有界,

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = m$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 = m^2$$

$$\text{因此 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 - a_1^2 = m^2 - a_1^2$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在,

所以级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1}^2 - a_n^2)$ 收敛 (利用部分和)

(2) 取 $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, (注意 $\{a_n\}$ 收敛与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的区别)

则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 发散.

7. 对级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1}$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$

则收敛半径为1, 再考虑边界值,

$x=1$ 时, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2$ 发散; $x=-1$ 时, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \cdot (-1)^n$ 发散

从而级数的收敛域为 $(-1, 1)$

令和函数 $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1}$, 且 $S(0) = 1$

$$\text{又 } S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$$

$$\text{且 } \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} \quad (-1 < x < 1)$$

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n+1} \right)'' = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)x^n \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)nx^{n-1}$$

$$\text{而 } \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x}, \quad (-1 < x < 1)$$

$$\text{有 } \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1-x-x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^{n-1} &= \left(\frac{x^2}{1-x} \right)'' = \left(\frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2} \right)' = \left(\frac{2x-x^2}{(1-x)^2} \right)' \\ &= \frac{(2-2x)(1-x)^2 - (2x-x^2) \cdot 2(1-x) \cdot (-1)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

$$\text{因此和函数 } S(x) = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3}, \quad -1 < x < 1$$

$$8. \text{ 由题, } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{-1}{r^2} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{-x}{r^3}$$

$$\text{类似地, } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-y}{r^3}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-z}{r^3}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\left(\frac{1}{r^3} + x \cdot \frac{-3}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x}\right) \\ &= -\left(\frac{1}{r^3} + \frac{-3x}{r^4} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = -\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}\right) \end{aligned}$$

$$\text{类似地, } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}\right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -\frac{3}{r^3} + \left(\frac{3x^2}{r^5} + \frac{3y^2}{r^5} + \frac{3z^2}{r^5}\right) \\ &= -\frac{3}{r^3} + \frac{3r^2}{r^5} \\ &= -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0, \quad \text{得证.} \end{aligned}$$

$$9. \text{ 代入 } t=1, \text{ 有 } f(-x, -y) = f(x, y)$$

$$\text{两边对 } x \text{ 求导, 有 } -f'_x(-x, -y) = f'_x(x, y)$$

$$\text{又 } f'_x(-1, 2) = 4, \text{ 则 } f'_x(1, -2) = -4$$

再对 $f(tx, ty) = t^2 f(x, y)$ 两边求 t 的导,

$$\text{有 } x f'_x(tx, ty) + y f'_y(tx, ty) = 2t f(x, y)$$

$$\text{代入 } t=1, \text{ 则 } x f'_x(x, y) + y f'_y(x, y) = 2f(x, y)$$

$$\text{代入 } x=1, y=-2, \text{ 则 } f'_x(1, -2) - 2f'_y(1, -2) = 2f(1, -2) = 6 \quad (\text{由 } M_0 \text{ 可知})$$

$$\text{解得 } f'_y(1, -2) = -5$$

$$\begin{aligned} \text{则 } dz|_{M_0} &= f'_x(1, -2) dx + f'_y(1, -2) dy \\ &= -4dx - 5dy \end{aligned}$$

10. 对 $a_n = \frac{n^2}{n-1}$ ($n \geq 2$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{n}}{\frac{n^2}{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2(n-1)}{n^3} = 1$$

则收敛半径为 1, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 不存在

则 $x = \pm 1$ 时显然 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ 发散

因此幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n-1} x^n$ 的收敛域为 $(-1, 1)$

$$\begin{aligned} \hat{S}(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n-1} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) x^n + x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} x^{n-1} \quad (-1 < x < 1) \end{aligned}$$

$$\text{由于 } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \hat{T}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$T'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \quad (-1 < x < 1)$$

$$\text{则 } T(x) = T(0) + \int_0^x T'(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-t) \Big|_0^x = -\ln(1-x)$$

$$\text{又 } \left(\sum_{n=2}^{\infty} x^{n+1} \right)' = \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) x^n$$

$$\begin{aligned} \text{且 } \sum_{n=2}^{\infty} x^{n+1} &= \frac{x^3}{1-x}, \quad \text{则 } \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) x^n = \left(\frac{x^3}{1-x} \right)' \\ &= \frac{3x^2(1-x) + x^3}{(1-x)^2} = \frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2}, \quad (-1 < x < 1) \end{aligned}$$

$$\text{则 } S(x) = \frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2} + x T(x) = \frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2} - x \ln(1-x), \quad -1 < x < 1$$

即为幂级数的和函数.

$$\text{则有 } S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{2} \ln 2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{因此 } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n-1)2^{n-1}} = 2S\left(\frac{1}{2}\right) = 4 + \ln 2$$

$$11. (1) \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0-0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0-0}{y} = 0$$

(2) 沿着 $y=0$ 方向趋于原点时,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} f(x,y) = 0 \quad ;$$

沿着 $y = -x + x^{2023}$ 方向趋于原点时,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = -x + x^{2023}}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2022}(x^{2023} - x)}{x^{2023}} = -1$$

二者不相等, 则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

12. 由题可知, l_1 的方向向量 $\vec{r}_1 = (-2, 3, 2)$, 且过点 $P_1(-2, 4, 3)$

l_2 的方向向量 $\vec{r}_2 = (4, 3, 5)$, 且过点 $P_2(5, 6, 4)$

$$\text{则 } \vec{P_1P_2} = (7, 2, 1)$$

$$\begin{aligned} \text{又 } (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{P_1P_2} &= \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-6 + 16 + 105) - (42 + 12 + (-20)) \\ &= 115 - 34 = 81 \neq 0 \end{aligned}$$

则直线 l_1 与直线 l_2 异面.

设公垂线与 l_1 交于点 A, 与 l_2 交于点 B,

由 l_1 与 l_2 的方程可得, 设 $A(-2-2t_1, 4+3t_1, 3+2t_1)$

$B(5+4t_2, 6+3t_2, 4+5t_2)$

$$\text{有 } \vec{AB} = (7+2t_1+4t_2, 2-3t_1+3t_2, 1-2t_1+5t_2)$$

又由于 $AB \perp l_1$, 且 $AB \perp l_2$, 有 $\vec{AB} \cdot \vec{r}_1 = \vec{AB} \cdot \vec{r}_2 = 0$

$$\text{则 } \begin{cases} -2(7+2t_1+4t_2) + 3(2-3t_1+3t_2) + 2(1-2t_1+5t_2) = 0 \\ 4(7+2t_1+4t_2) + 3(2-3t_1+3t_2) + 5(1-2t_1+5t_2) = 0 \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} -17t_1 + 11t_2 = 6 \\ -11t_1 + 50t_2 = -39 \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = -1 \end{cases} \quad \text{从而 } \vec{AB} = (1, 2, -2)$$

又 $A(0, 1, 1)$, 则公垂线的方程为 $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-2}$.

13. 由题, 利用 $f(x)$ 的周期性有 $f(x+2\pi) = f(x)$.

$$\begin{aligned} \text{又 } f(x+2\pi) &= \frac{1}{4}(x+2\pi)[2\pi-(x+2\pi)] \\ &= -\frac{1}{4}x(x+2\pi) \\ &= \frac{1}{4}(-x) \cdot [2\pi-(-x)] \\ &= f(-x) \end{aligned}$$

从而 $f(x) = f(-x)$, 故 $f(x)$ 为偶函数

因此对 $n \in \mathbb{N}_+$, $b_n = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{4}x(2\pi-x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} -x^2 + 2\pi x dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{3}x^3 + \pi x^2 \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\pi^3 - \frac{1}{3}\pi^3 \right) = \frac{\pi^2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n \geq 1 \text{ 时, } a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{4}(2\pi-x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} 2\pi x \cos nx dx - \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx \right) \\ &= \int_0^{\pi} \frac{x}{n} d \sin nx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{x^2}{n} d \sin nx \\ &= \frac{1}{n} (x \sin nx) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx dx - \frac{1}{2\pi n} (x^2 \sin nx) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx dx x^2 \\ &= -\frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx + \frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \\ &= \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} -\frac{x}{n} d \cos nx \\ &= \frac{\cos n\pi - 1}{n^2} - \frac{1}{\pi n^2} (x \cos nx) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos nx dx \\ &= \frac{\cos n\pi - 1}{n^2} - \frac{1}{\pi n^2} (\pi \cos n\pi - 0 - \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi}) \\ &= \frac{\cos n\pi - 1}{n^2} - \frac{\cos n\pi}{n^2} = -\frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

且 $f(x)$ 连续

由狄利克雷收敛定理, 有 $f(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{n^2}\right) \cdot \cos nx$, $x \in \mathbb{R}$.

$$(2) \text{ 由 (1), } x=0 \text{ 时 } f(0) = 0 = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{n^2}\right) \cdot \cos(0) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\text{则 } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

浙江大学 2022-2023 学年 春夏 学期

《微积分（甲）II》课程期中考试答案

来源：微信公众号“路老师的 nonsense collection”

1. 由题, $\vec{AB} = (3, 3, 5)$, $\vec{AC} = (10, 8, 8)$, $\vec{AD} = (0, -2, 5)$.

$$\begin{aligned}\text{则有 } (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} &= \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 10 & 8 & 8 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 8 & 8 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 10 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 3[40 - (-16)] - 10[15 - (-10)] \\ &= 168 - 250 = -82\end{aligned}$$

从而所求四面体体积 $V = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD}| = \frac{|-82|}{6} = \frac{41}{3}$.

2. 由题, l_1 的方向向量 $\vec{v}_1 = (2, 3, 4)$, l_2 的方向向量 $\vec{v}_2 = (1, 1, 2)$

设所求平面的法向量为 $\vec{n}$, 由于所求平面过 l_1 且平行于 l_2 ,

则有 $\vec{n} \perp \vec{v}_1$ 且 $\vec{n} \perp \vec{v}_2$.

$$\begin{aligned}\text{此时不妨取 } \vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (6-4)\vec{i} - (4-4)\vec{j} + (2-3)\vec{k} \\ &= (2, 0, -1).\end{aligned}$$

又直线 l_1 过点 $P_1(1, -2, -3)$, 则所求平面也过点 P_1 ,

所以所求平面方程为 $2(x-1) + 0(y+2) - (z+3) = 0$,

即 $2x - z - 5 = 0$.

3. 设过直线 L 的平面束方程为

$$\lambda(x+y-z-1) + \mu(x-y+z+1) = 0, \quad \lambda \text{ 与 } \mu \text{ 不同时为 } 0.$$

则找到平面 π_0 使 $\pi_0 \perp \pi$, 二者交线即为 L 的投影直线.
从平面束方程中.

$$\text{整理得 } (\lambda+\mu)x + (\lambda-\mu)y + (-\lambda+\mu)z - \lambda + \mu = 0$$

则平面 π_0 的法向量为 $(\lambda+\mu, \lambda-\mu, -\lambda+\mu)$.

由 $\pi_0 \perp \pi$, 且平面 π 的法向量为 $(1, 1, 1)$

$$\text{则 } (\lambda+\mu, \lambda-\mu, -\lambda+\mu) \cdot (1, 1, 1) = \lambda+\mu+\lambda-\mu-\lambda+\mu = \lambda+\mu = 0.$$

取 $\lambda=1$, 则 $\mu=-1$, 此时对应 π_0 方程为 $2y-2z-2=0$, 即 $y-z-1=0$

$$\text{从而投影直线方程为 } \begin{cases} x+y+z=0 \\ y-z-1=0 \end{cases}$$

4. 设直线上点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 旋转后对应旋转曲面上点 $P(x, y, z)$

$$\text{由旋转曲面是绕 } y \text{ 轴旋转所得, 则有 } \begin{cases} x_0^2 + z_0^2 = x^2 + z^2 \\ y_0 = y \end{cases}$$

$$\text{又因为 } P_0 \text{ 在直线上, 有 } x_0 - 1 = y_0 = z_0, \text{ 则 } \begin{cases} x_0 = y_0 + 1 = y + 1 \\ z_0 = y_0 = y \end{cases}$$

$$\text{因此有 } (y+1)^2 + y^2 = x^2 + z^2$$

$$\text{即所求旋转曲面方程为 } x^2 + z^2 = 2y^2 + 2y + 1$$

5. 要利用夹逼定理, 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$,

则有 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2+y^2) \ln(x^2+y^2) = 0$

又因为 $x^2+y^2 \geq 2|xy|$, 则 $|x^2y| \leq \frac{1}{2}|x|(x^2+y^2)$

从而 $|x^2y \ln(x^2+y^2)| \leq \frac{1}{2}|x|(x^2+y^2) \cdot |\ln(x^2+y^2)| = \frac{|x|}{2} |(x^2+y^2) \ln(x^2+y^2)|$

由于 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|}{2} |(x^2+y^2) \ln(x^2+y^2)| = 0 \cdot 0 = 0$,

由夹逼定理, 则 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x^2y \ln(x^2+y^2)| = 0$

从而 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2y \ln(x^2+y^2) = 0$

6. 对题中所给方程两边关于 x 求导, 则有

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = 2x + 2y \frac{dy}{dx} & ① \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y \frac{dy}{dx} + 6z \frac{dz}{dx} = 0 & ② \end{cases}$$

将①代入②有 $2x + 4y \frac{dy}{dx} + 6z(2x + 2y \frac{dy}{dx}) = 0$.

$$\text{解得 } \frac{dy}{dx} = -\frac{x+6xz}{2y+6yz}$$

$$\text{从而有 } \frac{dz}{dx} = 2x - 2y \cdot \frac{x+6xz}{2y+6yz} = \frac{2x(1+3z) - (x+6xz)}{1+3z} = \frac{x}{1+3z}$$

$$7. \text{由题, } f'_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0-0}{x} = 0,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0-0}{y} = 0.$$

$$\text{再考虑 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0) \cdot x - f'_y(0,0) \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|xy|} \sin \ln(x^2+y^2) - 0 - 0 - 0}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

此时取 $y=x$ 的方向趋于 $(0,0)$ 点, 上述极限变为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x^2|} \sin \ln(x^2+x^2)}{\sqrt{x^2+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow 0} \sin \ln(2x^2)$$

显然该极限不存在, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

8. 由题有
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

由于 u 有连续二阶偏导数, 则有 $\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}$ 成立.

此时
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} \right) \cdot 1 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \cdot 1 \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial t}{\partial y} \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} \right) \cdot 1 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \cdot (-1) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned}$$

将上述结果代入原方程中则有

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0$$

即
$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} + 4 \frac{\partial u}{\partial s} = 0,$$

即化简结果为
$$\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} = - \frac{\partial u}{\partial s}.$$

9. 该级数为交错级数. 令 $a_n = \frac{1}{n - \ln n} > 0$.

由于 $[(n+1) - \ln(n+1)] - [n - \ln n] = 1 - \ln(1 + \frac{1}{n}) \geq 1 - \ln 2 > 0$

对 $n \in \mathbb{N}_+$ 均成立, 则有 $(n+1) - \ln(n+1) > n - \ln n$, 则 $a_{n+1} < a_n$

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n - \ln n} = 0$, 由莱布尼茨判别法, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛.

又因为 $a_n > \frac{1}{n}$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

综上, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$ 条件收敛.

10. 由题, $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{2n+1}) x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$.

$$\text{且 } \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^2)^n = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$\text{此时令 } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}, \text{ 则 } x f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\text{从而有 } [x f(x)]' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } x f(x) - 0 &= \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2} dt = \int_0^x (-1 + \frac{1}{1-t^2}) dt = \int_0^x [1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t})] dt \\ &= -t + \frac{1}{2} \ln|1+t| - \frac{1}{2} \ln|1-t| \Big|_0^x = -x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \end{aligned}$$

$$\text{即 } x f(x) = -x + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad -1 < x < 1.$$

$$\text{又因为 } x=0 \text{ 时 } f(0) = 0, \text{ 则 } x \neq 0 \text{ 时 } f(x) = -1 + \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$\text{因此有 } S(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ \frac{x^2}{1-x^2} + 1 - \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x}, & -1 < x < 0 \text{ 或 } 0 < x < 1. \end{cases}$$

$$11. f(x) = \frac{1}{1-x-2x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-2x)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1-2x} \right)$$

由于 $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, 则 $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n$, 此时 $-1 < -x < 1$, 即 $-1 < x < 1$.

$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n$, 此时 $-1 < 2x < 1$, 即 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

$$\text{因此 } f(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3} x^n$$

收敛区间为 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

12. 先将 $f(x)$ 延拓成 $(-\pi, \pi]$ 上的奇函数, 仍记为 $f(x)$

再将其延拓成周期为 2π 的函数, 仍记为 $f(x)$.

此时有 $a_0 = a_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = -\frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x \, d\cos nx = -\frac{2}{n\pi} (x \cos nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos nx \, dx) \\ &= -\frac{2}{n\pi} (\pi \cos n\pi - 0 - \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi}) = -\frac{2}{n} \cos n\pi = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

由狄利克雷收敛定理, 有

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \text{ 此时 } 0 < x < \pi.$$

对和函数 $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$, 当 $x = \pi$ 时有 $S(\pi) = 0$

则有 $S(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \pi \\ 0, & x = \pi \end{cases}$ (延拓后的函数在 $x = \pi$ 处不连续)

13. i) 由题, 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, $a_{n+1}b_{n+1} \geq a_n b_n \geq \dots \geq a_1 b_1$.

从而有 $a_n \geq \frac{a_1 b_1}{b_n}$ 成立.

因为 $a, b_1 > 0$, 且级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_1 b_1}{b_n}$ 发散,

由比较法则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.

ii) 由题, 则对任意 $n \in \mathbb{N}_+$ 有 $a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} \geq \delta a_{n+1}$

$a_{n+1} b_{n+1} - a_n b_n \geq \delta a_n \dots a_1 b_1 - a_2 b_2 \geq \delta a_2$

求和有 $a_1 b_1 - a_{n+1} b_{n+1} \geq \delta (a_2 + \dots + a_{n+1}) = \delta \sum_{k=2}^{n+1} a_k$

令 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$

则 $\delta S_{n+1} \leq a_1 b_1 - a_{n+1} b_{n+1} + a_1 < a_1 (1 + b_1)$

即 $S_{n+1} \leq \frac{a_1 (1 + b_1)}{\delta}$, 从而部分和有界.

因此级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

浙江大学 2023-2024 学年 春夏 学期

《微积分（甲）II》课程期中考试答案

来源：微信公众号“路老师的 nonsense collection”

1. 由题, 已知两平面的法向量 $\vec{n}_1 = (1, 0, -4)$, $\vec{n}_2 = (3, -1, 1)$

又因为所求直线与已知两平面平行,

不妨取所求直线的方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0-4, -(1+12), -1-0) = (-4, -13, -1)$$

又直线过点 $(-3, 2, 5)$.

$$\text{因此所求直线方程为 } \frac{x+3}{-4} = \frac{y-2}{-13} = \frac{z-5}{-1}$$

2. 设所得旋转曲面上的点 $P(x, y, z)$ 对应直线 L 上点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\text{由于旋转轴为 } z \text{ 轴, 则有 } \begin{cases} x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 \\ z = z_0 \end{cases}$$

$$\text{又 } P_0 \text{ 在直线 } L \text{ 上有 } \frac{x_0}{1} = \frac{y_0}{-2} = \frac{z_0-1}{3}$$

$$\text{则 } x_0 = \frac{1}{3}(z_0-1) = \frac{1}{3}(z-1), \quad y_0 = -\frac{2}{3}(z_0-1) = -\frac{2}{3}(z-1)$$

$$\text{因此 } x^2 + y^2 = \left[\frac{1}{3}(z-1)\right]^2 + \left[-\frac{2}{3}(z-1)\right]^2 = \frac{5}{9}(z-1)^2$$

$$\text{从而所得旋转曲面方程为 } x^2 + y^2 = \frac{5}{9}(z-1)^2$$

3(1) 由题, $\vec{P_1P_2} = (-1, -1, 1)$, $\vec{P_1P_3} = (0, a, -3)$, $\vec{P_1P_4} = (-2, b, -1)$

$$\begin{aligned} \text{则 } (\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3}) \cdot \vec{P_1P_4} &= \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -3 \\ -2 & b & -1 \end{vmatrix} = (a+0-6) - (-2a+3b+0) \\ &= 3a-3b-6 \end{aligned}$$

若 P_1, P_2, P_3, P_4 四点共面, 则 $(\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3}) \cdot \vec{P_1P_4} = 0$

$$\text{则有 } 3a-3b-6=0, \text{ 即 } a=b+2$$

$$(2) \text{ 因为 } \vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -3 \end{vmatrix} = (3-a, -3, -a)$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \triangle P_1P_2P_3 \text{ 的面积 } S &= \frac{1}{2} |\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3}| = \frac{1}{2} \sqrt{(3-a)^2 + (-3)^2 + (-a)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 - 6a + 18} = \frac{3}{2} \sqrt{6} = \frac{1}{2} \sqrt{54} \end{aligned}$$

$$\text{则 } 2a^2 - 6a + 18 = 54$$

$$\text{即 } a^2 - 3a - 18 = (a-6)(a+3) = 0$$

$$\text{解得 } a = -3 \text{ 或 } a = 6$$

$$\text{则此时取 } \vec{n_2} = \vec{n_1} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 8 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (24-0, -(12-0), 4+16) = (24, -12, 20)$$

$$\text{从而 } \pi_2 \text{ 方程为 } 24(x-1) - 12(y-0) + 20(z-0) = 0$$

$$\text{化简即 } 6x - 3y + 5z - 6 = 0$$

法2 利用平面束方程

设过直线 L 的平面束方程为 $\lambda(x-y+z-1)+\mu(2x+y+z-2)=0$

整理得 $(\lambda+2\mu)x+(-\lambda+\mu)y+(\lambda+\mu)z-(\lambda+2\mu)=0$

其中 λ, μ 为常数且不同时为0.

取 π_1 对应参数为 λ_1, μ_1 ; π_2 对应参数为 λ_2, μ_2

则 π_1 的法向量 $\vec{n}_1 = (\lambda_1+2\mu_1, -\lambda_1+\mu_1, \lambda_1+\mu_1)$

又 π_1 与已知直线平行, 且已知直线一方向向量 $\vec{v} = (2, -1, 1)$

从而有 $\vec{n}_1 \perp \vec{v}$, 即 $\vec{n}_1 \cdot \vec{v} = 0$

则 $2(\lambda_1+2\mu_1) - (-\lambda_1+\mu_1) + \lambda_1+\mu_1 = 0$,

化简有 $4\lambda_1 + 4\mu_1 = 0$, 令 $\lambda_1 = 1$, 则 $\mu_1 = -1$

此时 π_1 方程为 $(1-2)x + (-1-1)y + (1-1)z - (1-2) = 0$

化简得 $x+2y-1=0$

又此时对应 $\vec{n}_1 = (1, 2, 0)$, 对 π_2 的法向量 $\vec{n}_2$

有 $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ 成立 即 $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

则 $\lambda_2+2\mu_2+2(-\lambda_2+\mu_2)+0=0$

化简有 $-\lambda_2+4\mu_2=0$, 令 $\lambda_2=4$ 则 $\mu_2=1$

则 π_2 方程为 $(4+2)x + (-4+1)y + (4+1)z - (4+2) = 0$

即 $6x-3y+5z-6=0$

5. 因为 $(x^2+y^2)^{xy} = e^{xy \ln(x^2+y^2)}$, 此时考虑 $xy \ln(x^2+y^2)$.

当 $xy > 0$ 时, $x^2+y^2 \geq 2xy > xy$

从而有 $xy \ln xy < xy \ln(x^2+y^2) < (x^2+y^2) \ln(x^2+y^2)$

又 $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ 时, $xy \rightarrow 0, x^2+y^2 \rightarrow 0^+$, 且 $xy > 0$ 时 $xy \rightarrow 0^+$.

$$\text{且 } \lim_{u \rightarrow 0^+} u \ln u = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} = \lim_{u \rightarrow 0^+} -u = 0$$

$$\text{即 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} xy \ln xy = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2+y^2) \ln(x^2+y^2) = 0$$

因此 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} xy \ln(x^2+y^2) = 0$, 此时 $xy > 0$

当 $xy < 0$ 时, 类似地, $x^2+y^2 > -xy$

有 $-xy \ln(-xy) < -xy \ln(x^2+y^2) < (x^2+y^2) \ln(x^2+y^2)$

则有 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} -xy \ln(x^2+y^2) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} xy \ln(x^2+y^2) = 0$, 此时 $xy < 0$

综上有 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} xy \ln(x^2+y^2) = 0$

因此 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2+y^2)^{xy} = e^{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} xy \ln(x^2+y^2)} = e^0 = 1$

6. 对 $z = u(x, y)e^{ax+by}$, 有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} e^{ax+by} + au e^{ax+by} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + au\right) e^{ax+by}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} e^{ax+by} + bu e^{ax+by} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + bu\right) e^{ax+by}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial y} \right) e^{ax+by} \\ &\quad + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + au \right) \cdot b e^{ax+by}\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial y} + abu \right) e^{ax+by}$$

将上述结果代入所给方程中, 又因为 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$, 有

$$\left(b \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial y} + abu\right) e^{ax+by} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + au\right) e^{ax+by} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + bu\right) e^{ax+by} + u e^{ax+by} = 0$$

$$\text{整理得 } \left[(b-1) \frac{\partial u}{\partial x} + (a-1) \frac{\partial u}{\partial y} + (ab-a-b+1)u \right] e^{ax+by} = 0$$

$$\text{则有 } \begin{cases} b-1=0 \\ a-1=0 \\ ab-a-b+1=0 \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

7. 对 $y = f(\cos x, 1+x^2)$, 求导有

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x \cdot f'_1 + 2x f'_2$$

再次求导有

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} = & -\cos x \cdot f'_1 + (-\sin x) \cdot (-\sin x \cdot f''_{11} + 2x f''_{12}) \\ & + 2f'_2 + 2x \cdot (-\sin x \cdot f''_{21} + 2x f''_{22}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{代入 } x=0 \text{ 有 } \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} &= -\cos 0 \cdot f'_1(1,1) + 2f'_2(1,1) \\ &= -f'_1(1,1) + 2f'_2(1,1) \end{aligned}$$

$$\text{又因为 } df|_{(1,1)} = 3du + 4dv = f'_1(1,1)du + f'_2(1,1)dv$$

$$\text{则 } f'_1(1,1) = 3, \quad f'_2(1,1) = 4$$

$$\text{从而 } \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} = -3 + 2 \times 4 = 5$$

8. (1) 由题, $\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \frac{|x-0|\varphi(x,0) - 0}{x} = \frac{|x|}{x} \varphi(x,0)$

则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} \varphi(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x,0) = \varphi(0,0)$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} \varphi(x,0) = -\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x,0) = -\varphi(0,0)$

再由 $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 邻域内连续,

类似地, $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{|y|\varphi(0,y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \varphi(0,y) = \varphi(0,0)$

$\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{-y|\varphi(0,y)|}{y} = -\lim_{y \rightarrow 0^-} \varphi(0,y) = -\varphi(0,0)$

若 $f'_x(0,0)$ 与 $f'_y(0,0)$ 存在, 则应有

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0}$

$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0}$

即 $\varphi(0,0) = -\varphi(0,0)$, 从而有 $\varphi(0,0) = 0$

因此 $\varphi(0,0) = 0$ 时, $f'_x(0,0)$ 与 $f'_y(0,0)$ 存在, 且 $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$

(2) 首先, 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则 $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$ 存在.
由 (1), 至少应有 $\varphi(0, 0) = 0$ 成立.

则此时 $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$

又由 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0)x - f'_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \text{ 成立}$$

$$\text{也即 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{|x-y|\varphi(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

下面证明不需添加其他条件上述极限式成立

因为 $|x-y| \leq |x| + |y|$, 再利用 $(|x| + |y|)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$

有 $|x-y| \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\text{则 } \frac{|x-y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{2}$$

$$\text{从而 } 0 \leq \frac{|x-y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} |\varphi(x, y)| \leq \sqrt{2} |\varphi(x, y)|$$

$$\text{又 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \varphi(x, y) = \varphi(0, 0) = 0.$$

$$\text{由夹逼准则 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{|x-y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \varphi(x, y) = 0$$

因此只需 $\varphi(0, 0) = 0$, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.

9. 注意到此时 x 是一个常数.

令 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+|x|}}$, 显然 $a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1+|x|}} < a_n$, 有数列 $\{a_n\}$ 递减;

又 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, 由 Leibniz 判别法,

则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+|x|}}$ 收敛.

又因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+|x|}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{|x|}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{1+0}} = 1$

且级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 因此级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+|x|}}$ 发散

综上级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+|x|}}$ 条件收敛

$$10. \text{ 令 } u_n = \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)}$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)} \right|}{\left| \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)} x^2 = x^2$$

当 $x^2 < 1$ 时, 有 $-1 < x < 1$, 此时幂级数绝对收敛.

考虑 $x^2 = 1$ 时, 则 $x = \pm 1$, 此时 $\left| \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)} \right| = \frac{1}{n(2n-1)}$

$$\text{又因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n(2n-1)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$ 收敛

从而 $x = \pm 1$ 时 幂级数绝对收敛.

因此幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 的收敛域为 $[-1, 1]$

$$\text{对 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)} = 2x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)} x^{2n}$$

$$\text{令 } T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)} x^{2n}, \quad -1 \leq x \leq 1, \text{ 有 } T(0) = 0.$$

$$\text{求得有 } T'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}, \text{ 此时 } T'(0) = 0, \quad -1 < x < 1$$

$$\text{再求得有 } T''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \\ = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{从而 } T'(x) = T'(0) + \int_0^x T''(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \\ = \arctan x$$

$$T(x) = T(0) + \int_0^x T'(t) dt = \int_0^x \arctan t dt \\ = t \arctan t \Big|_0^x - \int_0^x t d \arctan t \\ = x \arctan x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt \\ = x \arctan x - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{d(1+t^2)}{1+t^2} \\ = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \Big|_0^x \\ = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

$$\text{又因为 } S(x) = 2x T(x),$$

$$\text{从而 } S(x) = 2x^2 \arctan x - x \ln(1+x^2), \quad x \in [-1, 1].$$

11 由题要展开为余弦级数, 则先进行偶延拓.

将 $f(x)$ 延拓成 $(-2, 2]$ 上的偶函数, 记为 $F(x)$.

则 $0 \leq x \leq 2$ 时 $F(x) = f(x) = x-1$

$-2 < x < 0$ 时, $F(x) = F(-x) = -x-1$

$$\text{即 } F(x) = \begin{cases} -x-1 & -2 < x < 0 \\ x-1 & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

再将 $F(x)$ 延拓成周期为 4 的周期函数, 仍记为 $F(x)$.

此时有 $b_n = 0, n \in \mathbb{N}_+$

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 F(x) dx = \int_0^2 (x-1) dx = \left. \frac{1}{2}x^2 - x \right|_0^2 = \frac{1}{2} \times 4 - 2 = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 F(x) \cdot \cos \frac{n\pi}{2} x dx = \int_0^2 (x-1) \cos \frac{n\pi}{2} x dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^2 (x-1) d \sin \frac{n\pi}{2} x = \frac{2}{n\pi} \left[(x-1) \sin \frac{n\pi}{2} x \right]_0^2 - \int_0^2 \sin \frac{n\pi}{2} x d(x-1) \\ &= \frac{2}{n\pi} (\sin n\pi - 0 - \int_0^2 \sin \frac{n\pi}{2} x dx) \\ &= \frac{2}{n\pi} \cdot \frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} x \Big|_0^2 = \frac{4}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1), \quad n \in \mathbb{N}_+ \end{aligned}$$

又因为 $F(x)$ 满足狄利克雷收敛定理.

则当 $0 \leq x \leq 2$ 时 对 $f(x)$ 有

$$f(x) = x-1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1) \cos \frac{n\pi}{2} x, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

又因为 $\cos n\pi = (-1)^n$,

则 $n=2k-1, k \in \mathbb{N}_+$ 时 $\cos n\pi - 1 = -1-1 = -2$

$n=2k, k \in \mathbb{N}_+$ 时 $\cos n\pi - 1 = 1-1 = 0$

$$\text{从而有 } f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1) \cos \frac{n\pi}{2} x$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(2k-1)^2 \pi^2} (-2) \cos \frac{(2k-1)\pi}{2} x + 0$$

$$= -\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi}{2} x, \quad 0 \leq x \leq 2$$

代入 $x=0$, 因为 $f(0) = 0-1 = -1$

$$\text{则有 } -1 = -\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos 0$$

$$= -\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\text{从而 } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$12. f(x) = \frac{x}{2+x-x^2} = \frac{x}{(2-x)(x+1)} = \frac{A}{2-x} + \frac{B}{x+1} \quad A, B \text{ 为常数}$$

$$\text{则 } A(x+1) + B(2-x) = x, \text{ 即 } (A-B)x + A+2B = x$$

$$\begin{cases} A-B=1 \\ A+2B=0 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} A=\frac{2}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{即 } f(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2-x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+x}$$

$$\text{因为 } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \text{ 此时有 } -1 < x < 1$$

$$\text{则 } \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x^n, \text{ 有 } -1 < \frac{x}{2} < 1, \text{ 即 } -2 < x < 2$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \text{ 有 } -1 < -x < 1 \text{ 即 } -1 < x < 1$$

$$\text{从而 } \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{2^n} - (-1)^n \right] x^n,$$

此时取范围的交集有 $-1 < x < 1$

$$\text{因此 } f(x) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{2^n} - (-1)^n \right] x^n, \quad -1 < x < 1.$$

$$(3) \text{ 对 } a_n = \frac{1}{n^2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 的收敛半径为 1

又 $x=1$ 时级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, 收敛;

$x=-1$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ 也收敛

从而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 的收敛域为 $[-1, 1]$, 也即为函数 $f(x)$ 的定义域

$$\text{此时 } f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}, \text{ 有 } f'(0) = 1.$$

且由于 $x=1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 发散,

$x=-1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛,

此时有 $f'(x)$ 定义域为 $[-1, 1)$.

$$\text{令 } T(x) = x f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \text{ 此时 } x \in [-1, 1)$$

$$\text{则 } T'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}, \text{ 有 } x \in (-1, 1)$$

又因为 $T(0) = 0$, 积分有

$$T(x) = T(0) + \int_0^x T'(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt$$

$$= - \int_0^x \frac{1}{t-1} dt = - \ln|t-1| \Big|_0^x$$

$$= -(\ln|x-1| - \ln|0-1|) = -\ln(1-x),$$

$$\text{则 } x \neq 0, x \in [-1, 1) \text{ 时, } f'(x) = \frac{T(x)}{x} = -\frac{\ln(1-x)}{x},$$

$$\text{又 } x=0 \text{ 时 } f'(0) = 1$$

$$\text{因此 } f'(x) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-x)}{x}, & -1 \leq x < 0 \text{ 或 } 0 < x < 1 \\ 1, & x=0 \end{cases}$$

(2) 对 $f(1-x)$ 的定义域有 $-1 \leq 1-x \leq 1$, 即 $0 \leq x \leq 2$

从而令 $F(x) = f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x)$, $0 < x < 1$.

(这里指出 $f(x)$ 与 $f(1-x)$ 定义域是保证 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上有定义)

又 $0 < x < 1$ 时 $0 < 1-x < 1$ 也成立,

且此时 $f'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$,

从而有 $f'(1-x) = -\frac{\ln[1-(1-x)]}{1-x} = -\frac{\ln x}{1-x}$

$$\begin{aligned} \text{则 } F'(x) &= f'(x) - f'(1-x) + \frac{1}{x} \ln(1-x) + \ln x \cdot \frac{-1}{1-x} \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln x}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x} = 0 \end{aligned}$$

则 $F(x)$ 在 $x \in (0,1)$ 上恒为常数, 设其为 C

因为 $f(1) = \frac{\pi^2}{6}$, $f(0) = 0$, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续

$$\begin{aligned} \text{且 } x \rightarrow 1^- \text{ 时 } \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \ln(1-x) &\stackrel{t=1-x}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(1-t) \cdot \ln t \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} -t \ln t = -\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}} = -\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} t = 0 \end{aligned}$$

对 $F(x) = C$, 取 $x \rightarrow 1^-$ 的极限有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) \\ &= f(1) + f(0) + \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \ln(1-x) \\ &= \frac{\pi^2}{6} = C \end{aligned}$$

因此 $f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = \frac{\pi^2}{6}$, $x \in (0,1)$.