微积分甲(II)18-19学年期末考试题目

1. 设有二次曲面$S: x^2+xy+y^2-z^2=1$,试求曲面S上点$(1,-1,0)$处的切平面π的平面方程.

2. 求幂级数$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1}$的收敛半径与和函数.

3. 试叙述无穷级数$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$条件收敛的定义; 试判断命题"若无穷级数$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$条件收敛, 则无穷级数$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2$收敛"是否正确, 若正确请证明, 若不正确请举反例.

4. 设$f(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,\pi];\\ -2 & x\in(\pi,2\pi)\end{cases}$ 将$f(x)$延拓成$\mathbb{R}$上的以2π为周期的周期函数, 仍记作f, 试将f展开成Fourier级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)]$.

5. 设$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|1\le x^2+y^2\le 4\}$, S为上半圆锥面的一部分:即S为二元函数$z=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y)\in D$的图像,取内(上)侧为正侧, 试计算第二类曲面积分$\iint_S dydz+dzdx+dxdy$.

6. 设曲线C为一元函数$y=\int_1^x\sqrt{\sin(t^2)}dt, x\in\left[1,\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$的图像, 试计算第一类曲线积分$\int_C xds$.

7. 设$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上有连续的一阶偏导函数,且
$\forall t>0,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$有 $f(tx,ty)=t^3f(x,y)$,
试证明：$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 有 $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3f(x,y)$.

8. 设$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\ne(0,0);\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,试求$f$在点$(0,0)$处沿方向$\vec{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$(其中$\alpha\in[0,2\pi)$)的方向导数.

9. 设γ为圆柱螺线的一段$x=\cos t, y=\sin t, z=2t, 0\le t\le\pi$, 其中$\gamma$的正向为参数$t$增加的方向,
并设γ_1为γ的前半段有向弧($t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$), 其正向与$\gamma$一致, 又设$L$为圆柱螺线$\gamma$上点$(0,1,\pi)$处的切线,
并设L_1为切线L上一段以点$(0,1,\pi)$为起点,正向与γ正向一致,长度为$\sqrt{5}$的有向直线段, 试计算第二类曲线积分$\int_{\gamma_1\cup L_1}yzdx+xzdy+xydz$.

10. 试求三重累次积分$\int_0^1dx\int_0^1dy\int_y^1\frac{e^{-z^2}}{x^2+1}dz$.

11. 设$\mathbb{R}^3$中有一抛物面壳$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\le z\le 1)$，已知其面密度为正常数$c$,试求其重心坐标.

12. 设$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\le x\le 1, y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$, 其中$y=y_1(x), y=y_2(x)$是$[0,1]$上的连续函数, $u(x,y)$在包含D的一个开集上有连续的一阶偏导函数, 设D的边界∂D的正向为逆时针方向, 试证明:
$\oint_{\partial D}udx=-\iint\frac{\partial u}{\partial y}dxdy$.

13. 设$f(x,y)=(xy)^{\frac{2}{3}}$,
(1)试求$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$; (2)试证明：$f$在点$(0,0)$处可微.

14. 设$f(x,y)$在包含单位闭圆盘$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\le 1\}$的一个开集上具有连续的一阶偏导函数,且满足$\forall(x,y)\in D, |f(x,y)|\le 1$,试证明：存在一点$(x^*,y^*)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2<1\}$使得$[f_1'(x^*,y^*)]^2+[f_2'(x^*,y^*)]^2\le 16$成立.

微积分甲(II)19-20学年期末题目

1. 设$\alpha \in (-1,0)$, 试求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(2^n+3^n)n!}x^n$的收敛半径.

2. 试将函数$f(x)=\arctan x, x\in(-1,1)$展开成幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

3. 设$f(x,y)=x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$, 试求$f$在点$(0,0)$处沿方向$\vec{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$（其中$\alpha\in[0,2\pi)$）的方向导数$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(0,0)$; 并求当该方向导数取到最大值时, 对应的$\sin\alpha$的值.

4. 设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 试求$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$.

5. 试计算双曲抛物面$z=xy$被围在圆柱面$x^2+y^2=3$内的有界部分Σ的面积$A(\Sigma)$.

6. 设S为上半单位球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, 取外(上)侧为正侧, 试计算第二类曲面积分
$\displaystyle\iint\limits_{S^+}xdydz+ydzdx+xydxdy$.

7. 有一铁丝与一元函数$y=2\sqrt{x}, x\in[3,8]$的图像Γ重合, 已知其线密度为y, 试求其质量m.

8. 把z看成自变量为r,θ的函数, 试将方程$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0, (x,y)\neq(0,0)$变换为极坐标$(r,\theta)$的形式.

9. 利用傅里叶级数的理论证明：$\forall x\in(0,2\pi), \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{\sin kx}{k}=\dfrac{\pi-x}{2}$.

10. 设二元函数$P(x,y),Q(x,y)$在平面单连通开区域D上有所有连续的一阶偏导函数, 且在D内的任意一条光滑的简单封闭曲线C上, 都有$\displaystyle\oint_{C^+}P(x,y)dy-Q(x,y)dx=0$成立. 试证明在$D$内有$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}=0$恒成立.

11. 试证明：$\forall x\in(0,1), y\in(0,+\infty)$, 不等式$y(1-x)x^{y+1}<e^{-1}$成立.

12. (1) 设$\mathbb{R}^3$中封闭曲面S由二元连续函数$\rho=\rho(\theta,\varphi), (\theta,\varphi)\in[0,2\pi]\times[0,\pi]$给出, 其中$(\rho,\theta,\varphi)$是球坐标, 试证明$S$所围的有界闭立体$\Omega$的体积为

$$V(\Omega)=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}[\rho(\theta,\varphi)]^3\sin\varphi d\varphi;$$

(2) 试求封闭曲面$(x^2+y^2)^2+z^4=y$所围的空间有界闭立体K的体积$V(K)$.

浙江大学2020-2021学年_春夏_学期

《微积分（甲）II》课程期末考试试卷

1. 求曲面$S: z=x^2y^3-e^z+e$上点$(1,1,1)$处的切平面方程及法线方程.

2. 设空间曲线C为$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x=t, y=\frac{t^2}{2}, z=\frac{t^3}{3}, t\in[0,e]\}$，计算第一类曲线积分

$$I_1=\int_C \frac{xz}{\sqrt{1+2y+4y^2}}ds$$

3. 设函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，$\vec{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha), \alpha\in[0,2\pi)$,

(1) 求f在点(0,0)处沿方向$\vec{l}$的方向导数$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}|_{(0,0)}$ (2) 证明f在点(0,0)处不连续.

4. 设S为上半单位球面的一部分，$S:\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2=1, z\geq\frac{\sqrt{3}}{2}\}$，取外（上）侧为正侧，计算第二类曲面积分

$$J=\iint_S |x|dydz+|y|dzdx+\frac{dxdy}{z}.$$

5. 设曲线γ为平面有界闭区域$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 0\leq x\leq\pi, 0\leq y\leq\sin x\}$的边界，取逆时针方向为其正向，利用格林公式计算第二类曲线积分

$$I_c=\oint_\gamma 5e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy].$$

6. 设$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2\leq z\}$，计算三重积分

$$I=\iiint_K (z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})\ dxdydz$$

7. 设二元函数$z=f(u,v)$在平面上可微，且满足

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x^2+1,e^x)=e^{(x+1)^2}, f(x^2,x)=x^2e^{x^2}$$

求f在点(1,1)处的全微分$df|_{(1,1)}$.

8. 设$f(x)=e^x, x\in(-1,1]$，将f延拓成$\mathbb{R}$上以 2 为周期的周期函数，仍记作f，并设f的 Fourier 级数为 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos(n\pi x)+b_n\sin(n\pi x)]$,求级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$的和以及级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$的和.

9. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n+\frac{1}{2}}x^{2n}$的收敛半径及和函数.

10. 设$\mathbb{R}^3$中有一螺旋线段$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x=\cos t, y=\sin t,\ z=2t,\ t\in[0,2\pi]\}$，有一单位质量质点在力$\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z)$的作用下从点$(1,0,0)$沿着螺旋线段运动到点$(1,0,4\pi)$，求力$\vec{F}(t)$对质点所作的功 W.

11. 设D是平面上的一个有界闭区域，D^o是D的内部，二元函数$z=z(x,y)$在D上连续，在D^o上有所有的连续二阶偏导函数，且满足$\forall(x,y)\in D^o, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)=0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y)\neq 0$，证明：函数$z(x,y)$在$D$上的最值只能在$D$的边界$\partial D$上取到.

12. 设M为$\mathbb{R}^3$中由一张分片光滑的简单封闭曲面S所围的有界闭区域，U为包含M的一个开集，$\vec{n}$为S的单位外法向量场，$\vec{F}(x,y,z)=(f(x,y,z),\ g(x,y,z),\ h(x,y,z))$为$U$上的一个向量场，且$f(x,y,z)$，$g(x,y,z)$，$h(x,y,z)$在$U$上有所有的连续的一阶偏导函数，$P_0(x_0,y_0,z_0)$是$M$的一个内点，$V(M)$为$M$的体积，$diam(M)$为$M$的直径，向量场的积分定义为每个分量函数积分后的得到的向量场，证明：$\vec{F}$在点P_0处的旋度$\overrightarrow{rot(\vec{F})}\big|_{P_0}=\lim\limits_{diam(M)\to 0+}\frac{1}{V(M)}\oiint_S\vec{n}\times\vec{F}\,dS$.

浙江大学 2021-2022 学年 春夏 学期

《微积分（甲）II》课程期末考试试卷

1. 求函数$f(x)=1+\arctan x$的麦克劳林级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$, 并求级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$的收敛半径.

2. 设有一金属薄片, 其形如曲面$z=xy$与圆柱体$x^2+y^2=1$相交的部分, 其面密度为e, 求薄片的质量m.

3. 设空间曲线$\Gamma:\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x=t\cos t,y=t\sin t,z=t,t\in\left[\sqrt{2},\sqrt{\pi^2-2}\right]\}$, 求第一类曲线积分

$$I_1=\int_\Gamma\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s.$$

4. 已知曲线$C:(x-1)^2+y^2=4$, 且C取逆时针方向, 求第二类曲线积分$I_2=\oint_C\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$.

5. 设S为球面片$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2=1,x\geq0,y\geq0,z\geq0\}$, 取外(上)侧为正侧,
计算第二类曲面积分$J=\iint_S z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

6. 求$f(x)=\arcsin(\cos x)$的以2π为周期的**Fourier**级数$\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$,
并求$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)}{(2n+1)^2}$的值.

7. 已知单位闭球体$B:\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2\leq1\}$, 求函数$u=x+y+z$在$B$上的最大值与最小值.

8. 设函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, 已知$\vec{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha),\alpha\in[0,2\pi)$

(1) 求$f(x,y)$在$(0,0)$处沿方向$\vec{l}$的方向导数$\left.\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}\right|_{(0,0)}$.

(2) 证明$f(x,y)$在$(0,0)$处不可微.

9. 已知函数$g(u,v)$存在连续的一阶偏导函数$\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)$, $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$, 且$\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2, g_1'(u,v)+2g_2'(u,v)\neq 0$, 函数$z=z(x,y),(x,y)\in\mathcal{O}$ 由方程 $g(x-z,y-2z)=0$ 确定.

(1) 证明: $\forall (x,y)\in\mathcal{O}, \dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y)+2\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y)=1.$

(2) 证明: 曲面 $g(x-z,y-2z)=0$上的每一点处的切平面的法向量都垂直于向量$\vec{l}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.

10. 已知正项数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\dfrac{1}{2}$, 证明交错级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$收敛.

11. 设$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leq 1\}$为, U是$\mathbb{R}^2$包含D的开区域, 函数$z=f(x,y)$为定义在U上的一个非负二元函数, 存在连续的一阶偏导且$f|_{\partial D}=0$,证明:

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leq\frac{\pi}{3}\max_{(x,y)\in D}\sqrt{\left[\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right]^2+\left[\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right]^2}.$$

12. 设M为$\mathbb{R}^3$中由一光滑简单封闭曲面S所围成的有界闭区域, $V(M)$ 为M 的体积,$\mathcal{U}$为包含M的一个开集, $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$为$S$的单位外法向量, $f(x,y,z)$为定义在$\mathcal{U}$上并具有所有连续二阶偏导的函数, 且满足$\forall (x,y,z)\in M, f(x,y,z)\neq 0, \mathrm{div}\left(f\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)\right)=2f(x,y,z), ||\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)||^2=f(x,y,z)$. 证明:

$$\oiint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}dS=V(M)$$

微积分(甲)II 22-23 学年期末题

1. 求原点到空间曲线 $\begin{cases} xy+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=9 \end{cases}$ 上点 $P_0(2,1,-2)$ 处切线的距离 d.

2. 求空间曲线 $C:\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+2y^2+3z^2=1 \end{cases}$ 在平面 $x-2y+2z=10$ 上的投影曲线方程.

3. 求函数 $w=\arcsin x+y+5ze^{u(x,y)}$ 在点 $P_0(0,0,2)$ 处的梯度 $\operatorname{grad} w(P_0)$, 其中 $u(x,y)$ 是由方程 $yu^3-xu^4+u^5=1$ 所确定的隐函数.

4. 设函数 $u=u(x,y)$ 具有连续的二阶偏导数, 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial y}=xy,$$

作自变量替换 $x=\xi+\eta$, $y=\xi\eta$, 证明: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\xi^2\eta+\xi\eta^2$.

5. 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases} x-y^2+\dfrac{y^3x\sin x}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

(1) 求 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处沿方向 $\vec{l}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 的方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(0,0)$.

(2) 判断 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是否可微, 说明理由.

6. 判断以下级数是绝对收敛, 还是条件收敛, 还是发散, 说明理由:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{2n^2-\ln^3 n}}+\sin\frac{1}{n^p}\right).$$

7. 将函数 $f(x)=x^2\arctan(x^2)-\ln\sqrt{1+x^4}$ 展开为 x 的幂级数.

8. 计算累次积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^3}^{1}\frac{x}{1+x^2}\left(1+ye^{-(x^2+y^4)}\right)\mathrm{d}y$.

9. 计算三重积分 $\displaystyle\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由曲线 $y^2=2z$, $x=0$ 绕 z 轴旋转一周而成曲面与两平面 $z=2, z=8$ 所围的立体.

10. 求一质点在变力 $\vec{F}=(yz-e^{x^2})\vec{i}+(xz+\cos y)\vec{j}+(xy+z^3)\vec{k}$ 作用下, 从点 $A(2,0,0)$ 沿曲线

$L: x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ z=t$ 运动到点 $B(2,0,2\pi)$ 所做的功 W.

11. 设曲面 S 是锥面 $z^2=x^2+y^2$ 在 $1\le z\le 2$ 部分的下侧, 计算第二类曲面积分

$$I=\iint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

12. 计算第一类曲线积分 $\displaystyle\int_L \frac{x^2y^2(x+y)}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}s$, 其中 L 是双纽线 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ 在第一象限的部分.

13. 证明不等式 $yx^y(a-x)<ae^{-1}$ $(0<x<a, 0<y<+\infty)$, 其中常数 $a\in(0,1)$.

14. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是以光滑曲面 Γ 为边界的有界区域, 函数 $u(x,y,z)$ 与 $v(x,y,z)$ 及它们的一阶偏导数在闭区域

$\Omega\cup\Gamma$ 上连续, 在 Ω 内有二阶连续偏导数, 试利用高斯公式, 证明:

$$\iiint_\Omega (u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}V=\iint_\Gamma\left(u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)\mathrm{d}S,$$

其中算子 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\vec{n}$ 是 Γ 上的外法向.

微积分甲(II)23-24学年期末题

1. 点 $(-1,1,4)$ 到直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-5}{-1}$ 的距离为 ________.

2. 函数 $f(x,y,z)=x^3y+y^2z+zx$ 在点 $(1,1,1)$ 处沿 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,1,1)}=$ ________.

3. 曲面 $z=x^2+y^2$ 的切平面 π 与 x 轴平行且交 y 轴于点 $(0,1,0)$, 则 π 的方程为 ________.

4. 已知函数 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$, 则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,0)}=$ ________, $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(2,0)}=$ ________.

5. 如果 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left[2a_n+\frac{1}{(n+1)(n+3)}\right]=1$, 那么级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ 的和为 ________.

6. 已知曲面 $\Sigma: z=x^2+y^2\ (0\le z\le 6)$, 则第一类曲面积分 $\displaystyle\iint_{\Sigma}\frac{1}{1+4z}\mathrm{d}S=$ ________.

7. 已知曲线 $L: x^2+y^2=4$, 则第一类曲线积分 $\displaystyle\oint_L(2x+y)^2\mathrm{d}s=$ ________.

8. 已知 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 且 $f(x)=\begin{cases}-2, & -\pi<x\le 0,\\ 3, & 0<x\le\pi.\end{cases}$ $f(x)$ 的傅里叶级数中 $\sin 3x$ 的系数

$b_3=$ ________, 和函数在 $x=2\pi$ 处的值 $S(2\pi)=$ ________.

9. 求过直线 $L:\begin{cases}7x-y-2z=8,\\ x-9y+8z=20\end{cases}$ 且与球面 $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=\dfrac{1}{2}$ 相切的平面方程.

10. 求函数 $f(x,y)=2\ln|x+1|+\dfrac{x^2+y^2}{2(x+1)^2}$ 的极值.

11. 已知平面区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2y\}$, 计算二重积分 $I_1=\displaystyle\iint_D(x+y+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

12. 某物体在空间直角坐标系下表示为以下有界闭区域 $V=\left\{(x,y,z)\middle|\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\tan\alpha}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$,

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. 已知 V 内任一点的密度值等于该点到原点的距离.

(1) 求此物体的质量 M. (2) α 取何值时, 此物体的重心位于 $(0,0,1)$?

13. 已知 L 为从点 $A(-2,0)$ 沿 $y=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}$ 到点 $B(2,0)$, 计算第二类曲线积分

$$I_2=\int_L (x^2-y^2)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y.$$

14. 已知有向曲面 $S: x^2+y^2+z^2=4z\ (z\leq 2)$, 下侧, 计算第二类曲面积分

$$I_3=\iint\limits_S x^2y\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xy^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

15. 设 $\{a_n\}$ 为单调减少的正数列.

(1) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛当且仅当级数 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}2^k a_{2^k}$ 收敛.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{2n}}{a_n}=\rho$, 证明当 $\rho<\dfrac{1}{2}$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, 当 $\rho>\dfrac{1}{2}$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.