浙江大学 2018-2019 学年 春夏 学期

《微积分（甲）II》课程期末考试答案

来源：微信公众号“路老师的 nonsense collection”

1、设 $F(x,y,z)=x^2+xy+y^2-z^2-1=0$

则 $F_x'=2x+y$, $F_y'=x+2y$, $F_z'=-2z$

从而在点 $(1,-1,0)$ 处，对应的 $F_x'=1$, $F_y'=-1$, $F_z'=0$

则切平面 π 的法向量 $\vec{n}=(1,-1,0)$

又切平面 π 过点 $(1,-1,0)$，从而 π 的方程为 $(x-1)-(y+1)=0$

即 $x-y-2=0$.

2、令 $a_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$

从而幂级数的收敛半径 $r=1$

设 $S(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1}$，此时 $-1<x<1$，有 $S(0)=0$

则 $T(x)=xS(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum\limits_{n=3}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

从而求导有 $T'(x)=\sum\limits_{n=3}^{+\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^nx^n=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-x)^n$

$=\frac{(-x)^2}{1-(-x)}=\frac{x^2}{1+x}$

则 $T(x)-T(0)=\int_0^x T'(t)\,dt=\int_0^x\frac{t^2+t-t-1+1}{1+t}dt$

$=\int_0^x t-1+\frac{1}{t+1}dt=\ln|t+1|-t+\frac{1}{2}t^2\Big|_0^x=\frac{1}{2}x^2-x+\ln|x+1|$

又 $T(0)=0$，从而 $T(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\ln|x+1|$

从而 $x\neq0$ 时 $S(x)=\frac{T(x)}{x}=\frac{1}{2}x-1+\frac{\ln(x+1)}{x}$，此时还有 $-1<x<1$ 成立.

再考虑 $x=\pm1$ 情形. $x=-1$ 时 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1}=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散

$x=1$ 时 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1}=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 由莱布尼兹判别法易知其收敛

综上，则幂级数的和函数 $S(x)=\begin{cases}\frac{\ln(x+1)}{x}+\frac{1}{2}x-1 & -1<x<0\text{ 或 }0<x\leq1\\ 0 & x=0\end{cases}$

3. ① 若无穷级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，但无穷级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ 发散，称无穷级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 条件收敛.

② 取 $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ 则 $a_n^2 = \frac{1}{n}$

对于 $\frac{1}{\sqrt{n}}$，其递减且 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$，从而 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 条件收敛

但 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ 发散.

4. 先计算傅里叶系数，由于要延拓成以 2π 为周期的周期函数

且此时 $0 \le x < 2\pi$，则 $-\pi$ 到 π 对应的函数值与 π 到 2π 相同

即积分运算时，上下限取为 0 到 2π 即可

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} dx + \int_{\pi}^{2\pi} -2\,dx\right) = \frac{1}{\pi}(\pi - 2\pi) = -1$$

对 $n \in N_+$，$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx - \frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\cos nx\,dx$

$$= \frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\sin nx\Big|_{\pi}^{2\pi} = 0 - 0 = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx - \frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\sin nx\,dx$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi - 1) + \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi) = \frac{3}{n\pi}(1 - (-1)^n) \quad (\cos n\pi = (-1)^n)$$

由狄利克雷定理，在 $x=0$，$x=\pi$ 处是间断的，要额外进行考虑.

又 $\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2} = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}$，$\frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$

所以将 f 展开成 Fourier 级数为

$$-\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n\pi}(1-(-1)^n)\sin nx = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x=0,\ x=\pi \\ 1 & x \in (0,\pi) \\ -2 & x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

5、① Gauss公式补面法

记 $S_1: z=2$，下侧，$S_2: z=1$，上侧

S与S_1、S_2所围成区域为Ω，并且S与S_1，S_2构成了闭合曲面

由Gauss公式，$\oiint\limits_{S\cup S_1\cup S_2} dydz+dzdx+dxdy = -\iiint\limits_{\Omega} 0+0+0\,dV=0$

所以 $\iint\limits_{S} dydz+dzdx+dxdy = -\iint\limits_{S_1\cup S_2} dydz+dzdx+dxdy$

而 $\iint\limits_{S_1} dydz+dzdx+dxdy = -\iint\limits_{x^2+y^2\le 4} dxdy = -4\pi$ （取下侧变符号）

$\iint\limits_{S_2} dydz+dzdx+dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy = \pi$

从而 $\iint\limits_{S} dydz+dzdx+dxdy = -(-4\pi+\pi) = 3\pi$

② 直接计算法

对 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$z_x'=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$z_y'=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

且S在xOy面上的投影即为D，又S取上侧

则 $\iint\limits_{S} dydz+dzdx+dxdy = \iint\limits_{D} (1,1,1)\cdot(-z_x',-z_y',1)\,dxdy$

$= \iint\limits_{D} 1-\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 (1-\cos\theta-\sin\theta)\,r\,dr$

$= \int_0^{2\pi} 1-\cos\theta-\sin\theta\,d\theta \int_1^2 r\,dr$

$= 2\pi\cdot\frac{1}{2}(4-1) = 3\pi$

6. 由题, $y'=\sqrt{\sin x^2}$ 且 $1\leq x\leq\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

则 $\int_C x\,ds=\int_1^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\cdot\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_1^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\cdot\sqrt{1+\sin x^2}\,dx$

$\overset{u=x^2}{=}\frac{1}{2}\int_1^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin u}\,du=\frac{1}{2}\int_1^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2\frac{u}{2}+\cos^2\frac{u}{2}+2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}\,du$

$=\frac{1}{2}\int_1^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\sin\frac{u}{2}+\cos\frac{u}{2})^2}\,du=\frac{1}{2}\int_1^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{u}{2}+\cos\frac{u}{2}\,du$ ($\sin x+\cos x$ 在 $x\in[\frac{1}{2},\frac{\pi}{4}]$ 时大于0)

$=\sin\frac{u}{2}-\cos\frac{u}{2}\Big|_1^{\frac{\pi}{2}}$

$=\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}-(\sin\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{2})=\cos\frac{1}{2}-\sin\frac{1}{2}$

7. 对 $f(tx,ty)=t^3f(x,y)$, 注意到 t, 此时对方程两边关于 t 求导, 有

$xf_1'(tx,ty)+yf_2'(tx,ty)=3t^2f(x,y)$

且由题 f_1' 与 f_2' 连续, 取 $t=1$ 则有

$xf_1'(x,y)+yf_2'(x,y)=3f(x,y)$

而又由于 $f_1'(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $f_2'(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

从而即 $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3f(x,y)$ 成立.

8、利用方向导数的定义考虑

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f((0,0)+t\vec{l}) - f(0,0)}{t|\vec{l}|}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)}{t\cdot\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2\cos^2\alpha\cdot t\sin\alpha}{t(t^4\cos^4\alpha+t^2\sin^2\alpha)}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}$$

当 $\sin\alpha=0$ 时，$\alpha=0$ 或 $\alpha=\pi$，则此时极限值即为 0

当 $\sin\alpha\neq 0$ 时，$\alpha\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$，

上极限 $= \dfrac{\cos^2\alpha\sin\alpha}{\sin^2\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$

综上，对应的方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)} = \begin{cases} 0 & \alpha=0, \alpha=\pi \\ \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} & \alpha\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi) \end{cases}$

（不能用求 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}$ 的形式去求方向导数，此时是由于在 $(0,0)$ 处，$f(x,y)$ 并不可微）

9、由于 $yzdx+xzdy+xydz=d(xyz)$

从而 曲线积分与路径无关，只需考察起点与终点

对 $\gamma:\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\\ z=2t\end{cases}$ $t=0$ 时对应点为 $(1,0,0)$；$t=\frac{\pi}{2}$ 时对应点为 $(0,1,\pi)$ 即 γ_1 的起点 $(1,0,0)$ 终点 $(0,1,\pi)$

又 $\begin{cases}x'=-\sin t\\ y'=\cos t\\ z'=2\end{cases}$ 则在点 $(0,1,\pi)$ 处 $(t=\frac{\pi}{2})$，γ 的切向量为 $(-1,0,2)$

即 L 的方向向量为 $(-1,0,2)$，设 L_1 对应终点为 P

再记 $A(0,1,\pi)$ 则 $\vec{AP}=\sqrt{5}\cdot\frac{(-1,0,2)}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=(-1,0,2)$

因此 $P(-1,1,2+\pi)$

且 γ_1 的终点与 L_1 的起点相同

从而 $\int_{\gamma_1\cup L_1} yzdx+xzdy+xydz=\int_{\gamma_1\cup L_1} dxyz$

$=\int_{(1,0,0)}^{(-1,1,2+\pi)} d(xyz) = xyz\Big|_{(1,0,0)}^{(-1,1,2+\pi)} = -2-\pi$

10. $\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_y^1 \frac{e^{-z^2}}{x^2+1}dz$ 对 y,z 局部看 $0\le y\le 1,\ y\le z\le 1 \Downarrow 0\le z\le 1\ \ 0\le y\le z$

$=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx\int_0^1 dz\int_0^z e^{-z^2}dy$

$=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx\int_0^1 e^{-z^2}\cdot z\,dz$ (二者无关)

$=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx\cdot\int_0^1 e^{-z^2}z\,dz$

$=\arctan x\Big|_0^1\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-z^2}dz^2$

$=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot(-e^{-z^2})\Big|_0^1$

$=\frac{\pi}{8}\cdot(-e^{-1}+1) = \frac{\pi(e-1)}{8e}$

11. 设重心坐标 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$.

由对称性可知, $\bar{x}=\bar{y}=0$.

而其质量 $m=\iint\limits_S c\,dS = c\iint\limits_S dS$

设球壳在 xOy 面上的投影区域为 D. 有 $D:\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2\}$

又 $z'_x=x,\ z'_y=y$

则 $m=c\iint\limits_D\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy = c\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+r^2}\,r\,dr$

$=c\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+r^2}\,d(r^2+1)=\pi c\cdot\frac{2}{3}(r^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}$

$=\pi c\cdot\frac{2}{3}(3^{\frac{3}{2}}-1)=\pi c\,(2\sqrt{3}-\frac{2}{3})$

又 $\iint\limits_S cz\,dS = c\iint\limits_D\frac{1}{2}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$

$=\frac{1}{2}c\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^2\cdot\sqrt{1+r^2}\cdot r\,dr$

$=c\pi\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}}r^2\sqrt{1+r^2}\,dr^2 \overset{u=r^2+1}{=\!=\!=} \frac{1}{2}c\pi\int_1^3\sqrt{u}\,(u-1)\,d(u-1)$

$=\frac{1}{2}c\pi\int_1^3 u^{\frac{3}{2}}-u^{\frac{1}{2}}\,du$

$=\frac{1}{2}c\pi\cdot\left(\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^3\right)=\frac{1}{2}c\pi\left(\frac{2}{5}\cdot 3^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}\cdot 3^{\frac{3}{2}}-(\frac{2}{5}-\frac{2}{3})\right)$

$=\frac{1}{2}c\pi\left(\frac{18}{5}\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\frac{4}{15}\right)$

$=c\pi\left(\frac{4\sqrt{3}}{5}+\frac{2}{15}\right)=\frac{2+12\sqrt{3}}{15}c\pi$

则 $\bar{z}=\dfrac{\iint_S cz\,dS}{m}=\dfrac{\frac{2+12\sqrt{3}}{15}c\pi}{(2\sqrt{3}-\frac{2}{3})c\pi}=\dfrac{2+12\sqrt{3}}{30\sqrt{3}-10}=\dfrac{2(6\sqrt{3}+1)(3\sqrt{3}+1)}{10(3\sqrt{3}-1)(3\sqrt{3}+1)}$

$=\dfrac{18\times 3+6\sqrt{3}+3\sqrt{3}+1}{5\times 26}=\dfrac{55+9\sqrt{3}}{130}$

则重心坐标为 $(0,0,\frac{55+9\sqrt{3}}{130})$

12. 证明: 由题意可设 $\partial D = C_1\cup C_2\cup C_3\cup C_4$, 其中

$$C_1:\begin{cases}x=t\ ,\\ y=y_1(t)\ ,\quad t\in[0,1];\end{cases}$$

$$C_2:\begin{cases}x=1\ ,\\ y=t\ ,\quad t\in[y_1(1),y_2(1)];\end{cases}$$

$$C_3^-:\begin{cases} x=t \quad , \\ y=y_2(t)\ ,\quad t\in[0,1]; \end{cases}$$

$$C_4^-:\begin{cases} x=0\ , \\ y=t\ ,\quad t\in[y_1(0),y_2(0)]. \end{cases}$$

直接计算得左边 $=\oint_{\partial D} udx = \int_{C_1} udx + \int_{C_2} udx + \int_{C_3} udx + \int_{C_4} udx =$ $\int_0^1 u(t,y_1(t))dt + 0 + (-\int_0^1 u(t,y_2(t))dt) + 0 = \int_0^1 (u(t,y_1(t)) - u(t,y_2(t)))dt$;

$$\begin{aligned}
\text{右边} &= -\iint_D \frac{\partial u}{\partial y}dxdy \\
&= -\int_0^1 dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial u}{\partial y}dy \\
&= -\int_0^1 u(x,y)\Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} dx \\
&= -\int_0^1 (u(x,y_2(x)) - u(x,y_1(x)))dx = \text{左边}.
\end{aligned}$$

这里要对 12 题做一个说明，答案中的方法是把 D 这条曲线分成 4 部分然后单独计算每个曲线积分再求和，这里相当于是类似格林公式的证明来证明这道题，本意并不是想让大家运用格林公式直接得出结论。

13. (1) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$ (分子直接为0)

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$

(2) 要证可微，即证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

由(1)，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$

则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(xy)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

又 $x^2+y^2\geq 2xy$ 则 $(xy)^{\frac{2}{3}}\leq\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{\frac{1}{6}}=0$

又 $(xy)^{\frac{2}{3}}\geq 0$

则 由夹逼定理，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(xy)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

所以由可微的定义，则 f 在点 $(0,0)$ 处可微.

14. （根据结果进行的一个构造，看不明白也没关系）

令 $g(x,y)=f(x,y)+2(x^2+y^2)$

由于 $|f(x,y)|\leq 1$，则在圆 $x^2+y^2=1$ 上，$g\geq 1$ 必成立

而 $g(0,0)=f(0,0)\leq 1$，且 g 为连续函数

类比一元连续函数在闭区间内有最值，

则 g 在圆盘 D 内也应有最值

即在 D 内部，g 必会取到最小值

（要么 D 内有小于 1 的值，要么 D 内全取 1）

此时则必存在 (x^*,y^*)，且 $(x^*)^2+(y^*)^2<1$ 使得

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x^*,y^*)}=\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x^*,y^*)}=0$$

又 $\dfrac{\partial g}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+4x$，$\dfrac{\partial g}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}+4y$

所以有 $f_1'(x^*,y^*)=-4x^*$，$f_2'(x^*,y^*)=-4y^*$

从而 $\left(f_1'(x^*,y^*)\right)^2+\left(f_2'(x^*,y^*)\right)^2=(-4x^*)^2+(-4y^*)^2$

$=16(x^{*2}+y^{*2})<16$. 得证.

浙江大学 2019-2020 学年_春夏_学期

《微积分（甲）II》课程期末考试答案

来源：微信公众号“路老师的 nonsense collection”

1. 令 $a_n=(-1)^n\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(2^n+3^n)n!}$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(2^n+3^n)n!(\alpha-n)}{(2^{n+1}+3^{n+1})(n+1)!}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}\cdot\left|\dfrac{\alpha-n}{n+1}\right|$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{2}{3})^n+1}{2\cdot(\frac{2}{3})^n+3}=\dfrac{1}{3}$ 　　则收敛半径 $r=3$

2. $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

而对于 $x\in(-1,1)$，$\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$ （利用 $\dfrac{1}{1+x}$）

则 $\arctan x=\int_0^x\dfrac{1}{1+t^2}dt=\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}dt=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}dt$

$=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 　　$x\in(-1,1)$

3. （若先对 f 求 $\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$，则在 $(0,0)$ 处其无意义，如 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$）

由方向导数定义，$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(0,0)=\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{f(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha)-f(0,0)}{\rho}$

$=\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{\rho^{\frac{2}{3}}\cos^{\frac{2}{3}}\alpha\cdot\rho^{\frac{1}{3}}\sin^{\frac{1}{3}}\alpha}{\rho}=\cos^{\frac{2}{3}}\alpha\sin^{\frac{1}{3}}\alpha=\sqrt[3]{\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)}$

令 $t=\sin\alpha$，$g(t)=t-t^3$，则 $t\in[-1,1]$，又 $g'(t)=1-3t^2$

$g'(t)=0$ 时 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 　又 $g'(t)$ 在 $(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3})$ 上小于0，$(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$ 上大于0

$(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$ 上小于0，　$g(t)$ 是减增减，则 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时有极大值

而 $g(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$，　$g(t)=-1+1=0$ 　故 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时 $g(t)$ 有最大值

即 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时 方向导数 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(0,0)$ 取最大值.

4. 由偏导数定义，$(x,y)\neq(0,0)$ 时，$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y^3(x^2+y^2)-xy^3\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^5-x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$

而在 $(0,0)$ 处，$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x\cdot 0^3}{x^2+0}=0$

即 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}0 & (x,y)=(0,0)\\ \frac{y^5-x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$

由二阶偏导数定义，$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\frac{y^5-0}{y^4}-0}{y}=1$

5. 由题，所求 $A(\Sigma)=\iint\limits_{\Sigma}dS$ （第一类曲面积分）

$z_x'=y$，$z_y'=x$，投影区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 3\}$

$=\iint\limits_{D}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+r^2}\cdot r\,dr$

$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+r^2}\,dr^2$

$=\pi\cdot\int_1^4\sqrt{u}\,du\quad(u=r^2+1)\quad=\frac{2}{3}\pi\,u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4=\frac{2}{3}\pi(4^{\frac{3}{2}}-1)=\frac{2\pi}{3}\cdot 7=\frac{14\pi}{3}$

6. 法I：补曲面用高斯公式

取 S_0：$x^2+y^2\leq 1$，$z=0$ 下侧

则 $I_0=\iint\limits_{S_0}x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+xy\,dx\,dy$

$=\iint\limits_{S_0}xy\,dx\,dy$

$=-\iint\limits_{D}xy\,dx\,dy\quad(D:x^2+y^2\leq 1)$

$=0$ （利用对称性）

设 S_0 与 S 所围区域为 V

由 Gauss 公式，$I+I_0=\iiint\limits_{V}1+1\,dV$

又 V 为上半球，

则 $\iiint\limits_{V}dV=\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot 1^3=\frac{2}{3}\pi$

则 $I=2\iiint\limits_{V}dV=\frac{4}{3}\pi$

法Ⅱ：直接计算

S的投影为 $D:\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$

$z_x' = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$，$z_y' = \dfrac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

则由于S取上侧，法向量为 $(-z_x', -z_y', 1)$

$$\text{则 } I = \iint_{S^+} x\,dydz + y\,dzdx + xy\,dxdy$$

$$= \iint_D (x, y, xy)\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x-y^2}}, 1\right) dxdy$$

$$= \iint_D \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + xy\,dxdy$$

$$= \iint_D \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy \quad (\text{对称性})$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} \cdot r\,dr$$

$$= \pi \int_0^1 \frac{r^2\,dr^2}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$\overset{t=\sqrt{1-r^2}}{=\!=} \pi \int_1^0 \frac{(1-t^2)\,d(1-t^2)}{t} = \pi \cdot \int_0^1 2-2t^2\,dt$$

$$= \pi \cdot 2t - \frac{2}{3}t^3\Big|_0^1$$

$$= \pi \cdot \left(2-\frac{2}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}$$

7. （第一类曲线积分）

$$m = \int_L y\,ds$$

$$= \int_3^8 2\sqrt{x}\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$= 2\int_3^8 \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx$$

$$= 2\int_3^8 \sqrt{x+1}\,dx$$

$$\overset{t=x+1}{=\!=} 2\int_4^9 \sqrt{t}\,dt$$

$$= 2 \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\Big|_4^9 = \frac{4}{3} \times (9\sqrt{9} - 4\sqrt{4}) = \frac{4}{3} \times (27-8) = \frac{76}{3}$$

8. 极坐标形式则有 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

而 $\dfrac{\partial z}{\partial r} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\dfrac{\partial z}{\partial x} + \sin\theta\dfrac{\partial z}{\partial y}$

$\dfrac{\partial z}{\partial \theta} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta\dfrac{\partial z}{\partial x} + r\cos\theta\dfrac{\partial z}{\partial y}$

联立解得 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \cos\theta\dfrac{\partial z}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \sin\theta\dfrac{\partial z}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{cases}$

将其代入 $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ 中，则有 $r\cos^2\theta\dfrac{\partial z}{\partial r} + r\sin^2\theta\dfrac{\partial z}{\partial r} = 0$

又 $(x,y) \neq (0,0)$ 则 $r \neq 0$ 故可转化为 $\dfrac{\partial z}{\partial r} = 0$

（变换成极坐标形式本质就是利用极坐标表达把偏导对应的自变量进行改变）

9. 令 $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$，将 f 延拓成 R 上以 2π 为周期的奇函数（奇延拓） 其中 $x \in (0, 2\pi)$

有 $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$

$= \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$

对 $\forall n \in Z^+$，$a_n = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$

$= \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0$

$b_n = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$

$= \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

$= \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \dfrac{\pi - x}{2}\sin nx\,dx$

$= \int_0^{\pi}\sin nx\,dx - \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx$

$= \dfrac{-\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \dfrac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} x\,d\cos nx$

$= \dfrac{1}{n} - \dfrac{\cos n\pi}{n} + \dfrac{1}{n\pi}\left(x\cos nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)$

$= \dfrac{1}{n} - \dfrac{\cos n\pi}{n} + \dfrac{1}{n\pi}\left(\pi\cos n\pi - \dfrac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right) = \dfrac{1}{n}$

则有 $f(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$

又 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上连续

由狄利克雷收敛定理，傅里叶级数收敛

有 $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = f(x)$

则有 $\forall x \in (0, 2\pi)$，$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{\sin kx}{k} = \dfrac{\pi - x}{2}$ （代入 a_0, a_n, b_n）

本题关键点在于，延拓和狄利克雷收敛定理这两点一定要有说明，前者是保证积分过程中 0 到 2π积分和正常计算中-π到π的积分相同，后者是为了得出证明中的等号，因为题中没考虑边界所以有等号成立。（因为这写着是证明和单纯计算还是有区别的）

10. 设D内任意一光滑简单封闭曲线C所围区域为D_*

由格林公式，$\iint\limits_{D_*} \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\,dxdy = \oint_{C^+} P(x,y)dy - Q(x,y)dx = 0$ (*)

用反证法，若∃点$M_0 \in D$使$\left.\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{M_0} \neq 0$ 不妨设$\left.\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{M_0} > 0$

由于$\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}$在D内连续，由局部保号性可知，存在$M_0$的一个小闭圆邻域$D_0 \subset D$

使$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$在$D_0$上恒大于$\frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{M_0}\right)$，设$D_0$面积为$S>0$

则$\iint\limits_{D_0}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy \geq S\cdot\frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{M_0}\right) > 0$，与(*)式矛盾，

则在D内恒有$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0$成立

用了格林公式之后，题中✻式不能直接就推出那个积分内的值是 0，或者说，直接用 D*的任意性去推叙述上会有问题存在，这种时候就最好是利用反证法考察。

11.

试证明：$\forall x \in (0,1), y \in (0,+\infty)$, 成立：$y(1-x)x^{y+1} < e^{-1}$.

证明：令$f(x,y) = y(1-x)x^{y+1}$

则$f(x,y)$在$x=0, x=1, y=0$上均取0

在区域$D=\{(x,y)\,|\,0<x<1, y>0\}$上内恒大于0

则f的最大值只能在D内部取到

则最大值点必为f驻点，设其为(x_0,y_0)

又$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = yx^y(1-2x+y(1-x)) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^{y+1}(1+y\ln x)(1-x) \end{cases}$

则在(x_0,y_0)处$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$

有$\begin{cases} 2x_0-1=y_0(1-x_0) \\ 1+y_0\ln x_0=0 \end{cases}$ (忽略上述方程中恒大于0项)

$y_0\ln x_0=-1$

则$x_0^{y_0}=\frac{1}{e}$

(而此时$f(x_0,y_0)$

$=y_0(1-x_0)x_0^{y_0+1}$

$=(2x_0-1)\cdot x_0\cdot\frac{1}{e}$

又$x_0\in(0,1)$

对$g(x)=2x^2-x$，$g'(x)=4x-1$

$g(x)$在$(0,\frac{1}{4})$上减 在$(\frac{1}{4},1)$上增

则在$(0,1)$上$g(x)<g(0)$且$g(x)<g(1)$

又$g(0)=0, g(1)=1$

则$2x_0^2-x_0<1$恒成立

则$f(x_0,y_0)<1\cdot\frac{1}{e}=\frac{1}{e}$

又$f(x_0,y_0)$为最大值

则对$\forall(x,y)\in D$，有$y(1-x)x^{y+1}<\frac{1}{e}$成立

12.

(1) 由球面坐标

$$V(\Omega)=\iiint\limits_{\Omega} dxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{\rho(\theta,\varphi)}\rho^2\sin\varphi\, d\rho$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\left(\rho(\theta,\varphi)\right)^3\sin\varphi\, d\varphi$$

(直接对最后部分积分即可)

(2) 封闭曲面球坐标方程转化为

$$\rho\sin\varphi\sin\theta=(\rho^2\sin^2\varphi)^2+\rho^4\cos^4\varphi$$

此时 $\rho=\left(\dfrac{\sin\varphi\sin\theta}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}\right)^{\frac{1}{3}}$

但注意到，此时对范围有 $\begin{cases}\sin\varphi\geq 0\\ \sin\theta\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\leq\varphi\leq\pi\\ 0\leq\theta\leq\pi\end{cases}$

将上述式子代入(1)中结果

有 $V(\Omega)=\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi\sin\theta}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}\sin\varphi\, d\varphi$ (相当于其在 $(\pi,2\pi)$ 上取0)

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\cdot\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}d\varphi$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}d\varphi$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}d\varphi=\frac{4}{3}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}dt$$

$$=\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$$

具体计算第(2)问积分过程如下

① $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}d\varphi$

对 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin^2\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}d\varphi\ \overset{t=\pi-\varphi}{=\!=\!=}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^2(\pi-t)}{\sin^4(\pi-t)+\cos^4(\pi-t)}d(\pi-t)$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{\sin^4 t+\cos^4 t}dt\qquad(\sin(\pi-t)=\sin t,\ \cos(\pi-t)=-\cos t)$$

② 对 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}d\varphi\ \overset{t=\tan\varphi}{=\!=\!=}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\tan^2\varphi)}d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2\varphi}{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\tan^2\varphi}d\varphi$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2\varphi}{1+\tan^4\varphi}\frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2\varphi}{1+\tan^4\varphi}d\tan\varphi$$

③ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}dt$

对 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}dt\ \overset{u=\frac{1}{t}}{=\!=\!=}\int_{+\infty}^{0}\frac{u^2}{1+\frac{1}{u^4}}d\frac{1}{u}=\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{u^4+1}\cdot\frac{1}{u^2}du$

$=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{u^4+1}du$ 则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2+1}{t^4+1}dt$

而 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^2+1}{t^4+1}dt=\int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}dt=\int_0^{+\infty}\frac{d\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2}\ \overset{x=t-\frac{1}{t}}{=\!=\!=}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\frac{x}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}dt=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

浙江大学 2020-2021 学年 春夏 学期

《微积分（甲）II》课程期末考试答案

来源：微信公众号“路老师的 nonsense collection”

1. 对 $z=x^2y^3-e^z+e$，令 $F(x,y,z)=z-x^2y^3+e^z-e=0$

则 $F_x'(x,y,z)=-2xy^3$，$F_y'(x,y,z)=-3x^2y^2$

$F_z'(x,y,z)=1+e^z$

则对应 $F_x'(1,1,1)=-2$，$F_y'(1,1,1)=-3$，$F_z'(1,1,1)=1+e$

即切平面的法向量为 $(-2,-3,1+e)$

从而切平面方程为 $-2(x-1)-3(y-1)+(1+e)(z-1)=0$

即 $-2x-3y+(1+e)z+4-e=0$

对应法线方向向量也为 $(-2,-3,1+e)$

则法线方程为 $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{1+e}$

2. 由于 $\frac{dx}{dt}=1$，$\frac{dy}{dt}=t$，$\frac{dz}{dt}=t^2$

从而 $I_1=\int_0^e \frac{t\cdot\frac{t^3}{3}}{\sqrt{1+2\cdot\frac{t^2}{2}+4\cdot(\frac{t^2}{2})^2}}\cdot\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2+(\frac{dz}{dt})^2}\,dt$

$=\int_0^e \frac{t^4}{3\sqrt{1+t^2+t^4}}\cdot\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt$

$=\int_0^e \frac{1}{3}t^4dt=\frac{1}{15}t^5\Big|_0^e=\frac{e^5}{15}$

3. (1) 此时要依托方向导数的定义

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(0,0)}=\lim_{t\to0^+}\frac{f((0,0)+t\vec{e})-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\cdot\frac{t^2\cos^2\alpha\cdot t\sin\alpha}{t^4\cos^4\alpha+t^2\sin^2\alpha}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}$$

注意到此时若直接把 t 看成0，结果为 $\frac{\cos^2\alpha\sin\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$

但 $\sin\alpha$ 可能为0，从而要讨论

$\sin\alpha=0$ 时 $\alpha=0$ 或 $\alpha=\pi$ $(0\le\alpha<2\pi)$

从而此时 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(0,0)}=0$

因此综上，$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(0,0)}=\begin{cases}0 & \alpha=0,\pi\\ \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} & 0<\alpha<\pi \text{ 或 } \pi<\alpha<2\pi\end{cases}$

注：此时不能用 $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha$ 来得到结果，

因为在 $(0,0)$ 点 f 不可微（(2)中甚至不连续）

(2) 考虑 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$，

取 $y=x^2$，该极限变为 $\lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot x^2}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}$

取 $y=0$，该极限变为 $\lim_{x\to0}\frac{0\cdot x^2}{x^4}=0$

二者不相等，说明 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在

则必不等于 $f(0,0)$，从而 f 在 $(0,0)$ 处不连续

4、注意到被积函数中有|x|,|y|的形式，求导不能直接求，
所以想用高斯公式，要么先对称，要么就被迫不能用
(哪怕想用，对称成上半球缺的后，要再补两个面(不算必补的底面))
而这种转化十分麻烦还容易算错
故此时用直接法进行求解

有 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ($z\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$ 使得 $z>0$)，且取上侧为正侧，有

$$z_x'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\quad z_y'=\frac{-2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

从而法向为 $\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},1\right)$ (对应公式 $(-z_x',-z_y',1)$)

而 S 在 xOy 面上的投影应为 D_0：$x^2+y^2\leq\frac{1}{4}$ (球面中代入 $z=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 得 $\frac{1}{4}$)

所以

$$J=\iint_S |x|dydz+|y|dzdx+\frac{dxdy}{z}$$

$$=\iint_{D_0}\left(|x|,|y|,\frac{1}{z}\right)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},1\right)dxdy\quad (z=\sqrt{1-x^2-y^2})$$

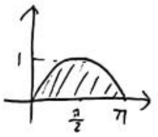
$$=\iint_{D_0}\frac{x|x|}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\frac{y|y|}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=\iint_{D_0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$$ (利用对称性，前两个函数分别关于x/y为奇)

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}dr$$

$$=2\pi\cdot\left(-\sqrt{1-r^2}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=2\pi\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-(-1)\right)=(2-\sqrt{3})\pi$$

5、



由格林公式

$$I_C = \oint_\gamma 5e^x(1-\cos y)\,dx - 5e^x(y-\sin y)\,dy$$

$$= \iint_D -5e^x(y-\sin y) - 5e^x\cdot\sin y \, dxdy$$

$$= \iint_D -5e^x y \, dxdy$$

$$= -5\int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} e^x y \, dy$$

$$= -5\int_0^\pi \frac{1}{2}e^x\cdot y^2 \Big|_0^{\sin x} = -5\int_0^\pi \frac{1}{2}e^x \sin^2 x \, dx$$

$$= -\frac{5}{2}\int_0^\pi \sin^2 x \, de^x$$

$$= -\frac{5}{2}\left(\sin^2 x\cdot e^x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^x \, d\sin^2 x\right)$$

$$= \frac{5}{2}\cdot\int_0^\pi e^x\cdot 2\sin x\cos x \, dx$$

$$= \frac{5}{2}\int_0^\pi \sin 2x \, de^x = \frac{5}{2}\cdot\left(\sin 2x\cdot e^x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^x \, d\sin 2x\right)$$

$$= \frac{5}{2}\cdot\left(-2\int_0^\pi \cos 2x\cdot e^x \, dx\right) = -5\int_0^\pi \cos 2x \, de^x$$

$$= -5\left(e^x\cos 2x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^x \, d\cos 2x\right)$$

$$= -5\left(e^\pi - 1 + 2\int_0^\pi e^x \sin 2x \, dx\right)$$

又 $I_C = \frac{5}{2}\int_0^\pi \sin 2x\cdot e^x dx = -5(e^\pi-1) - 10\cdot\int_0^\pi \sin 2x\cdot e^x \, dx$

从而 $\int_0^\pi \sin 2x\cdot e^x dx = \dfrac{-5(e^\pi-1)}{10+\frac{5}{2}} = \dfrac{2(1-e^\pi)}{5}$

因此 $I_C = \frac{5}{2}\cdot\frac{2(1-e^\pi)}{5} = 1-e^\pi$

6. 对该三重积分，首先考虑到是球区域，使用球坐标

$$I=\iiint_K \left(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}(r+r\cos\varphi)\cdot r^2\sin\varphi\,dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{\cos\varphi}r^3+r^3\cos\varphi\,dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi}{4}(1+\cos\varphi)\cdot r^4\Big|_0^{\cos\varphi}d\varphi$$

（注意到 r,θ,φ 的范围：由 $r^2\le r\cos\varphi$，θ 不受影响，$r\le\cos\varphi$，而 $\cos\varphi$ 要大于等于0 有 $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$ ）

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\varphi)\cos^4\varphi\,d\cos\varphi\right)$$

$$=-\frac{\pi}{2}\int_1^0 u^4+u^5\,du=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}u^5+\frac{1}{6}u^6\right)\Big|_0^1$$

$(u=\cos\varphi)$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)=\frac{11\pi}{60}$$

7. 由题，对 $f(x^2+1,e^x)=e^{(x+1)^2}$ 两边关于 x 求导，有

$$f_1'(x^2+1,e^x)\cdot 2x+f_2'(x^2+1,e^x)\cdot e^x=e^{(x+1)^2}\cdot 2(x+1)$$

把 $x=0$ 代入，有 $f_1'(1,1)\cdot 0+f_2'(1,1)\cdot 1=e^{1^2}\cdot 2\cdot 1=2e$

即 $f_2'(1,1)=2e$

再对 $f(x^2,x)=x^2e^{x^2}$ 两边关于 x 求导，有

$$f_1'(x^2,x)\cdot 2x+f_2'(x^2,x)\cdot 1=2xe^{x^2}+x^2e^{x^2}\cdot 2x$$

代入 $x=1$，有 $f_1'(1,1)\cdot 2+f_2'(1,1)=2\cdot e^1+1^2\cdot e^1\cdot 2$

即 $2f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=4e$

从而 $f_1'(1,1)=e$

因此 $df\big|_{(1,1)}=f_1'(1,1)dx+f_2'(1,1)dy$

$$=edx+2edy$$

8. 先计算 $a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} e^x dx = e - e^{-1}$ （注意到这里的周期是2）

而这里进一步的由 Dirichlet 定理，

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x) = e^x \text{，当 } -1<x<1$$

且 $x=\pm1$ 时，上式 $= \frac{f(1^+)+f(1^-)}{2} = \frac{f(-1^+)+f(1^-)}{2} = \frac{e^{-1}+e}{2}$

（因为没说让求 a_n, b_n，所以先避免直接去求）

取 $x=1$，$\cos n\pi = (-1)^n$，$\sin n\pi = 0$

则 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot (-1)^n + 0 = \frac{e+e^{-1}}{2}$

有 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n = \frac{e+e^{-1}}{2} - \frac{a_0}{2} = \frac{e+e^{-1}-(e-e^{-1})}{2} = \frac{1}{e}$

当 $x=0$ 时，$\sin n\pi \cdot 0 = 0$，$\cos n\pi \cdot 0 = 1$

有 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot 1 + b_n \cdot 0 = e^0 = 1$

则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1 - \frac{a_0}{2} = 1 - \frac{e-e^{-1}}{2}$.

9. 先对 x^{2n} 转化，令 $t = x^2$，$a_n = (-1)^n \frac{n}{n+\frac{1}{2}}$

则原级数可写为 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n$

则 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)\cdot(n+\frac{1}{2})}{(n+\frac{3}{2})\ (-1)^n \cdot n}\right| = 1$

收敛半径 $r = \frac{1}{1} = 1$.

即 $x^2<1$ 时 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{2n}$ 是绝对收敛的.

考虑 $x^2=1$，即 $x=\pm1$ 时，原级数化为 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{n}{n+\frac{1}{2}}$

而 $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot\frac{n}{n+\frac{1}{2}}$ 不存在，从而该级数发散.

（n为奇时为-1，n为偶时为1）

再求和函数，令 $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n+\frac{1}{2}}x^{2n}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{2n}{2n+1}x^{2n}$ （不要出现$\frac{1}{2}$在分母上）

令 $T(x)=xS(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n}{2n+1}x^{2n+1}$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{2n+1-1}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^{2n+1}-\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$=x\sum_{n=1}^{+\infty}(-x^2)^n-\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$=x\cdot\frac{-x^2}{1-(-x^2)}-\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

再令 $R(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

而 $R'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{-x^2}{1-(-x^2)}=\frac{-x^2-1+1}{1+x^2}=-1+\frac{1}{1+x^2}$

则 $R(x)-R(0)=\int_0^x R'(t)dt=\int_0^x -1+\frac{1}{1+t^2}dt$

$$=-t+\arctan t\Big|_0^x=-x+\arctan x$$

又 $R(0)=0$， 则 $R(x)=-x+\arctan x$

则 $T(x)=x\cdot\frac{-x^2}{1+x^2}-R(x)=\frac{-x^3}{1+x^2}+x-\arctan x=xS(x)$

当 $x=0$时，$S(0)=0$

当 $x\neq0$时，$S(x)=\frac{T(x)}{x}=\frac{-x^2}{1+x^2}+1-\frac{\arctan x}{x}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{\arctan x}{x}$

综上 $S(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \frac{1}{1+x^2}-\frac{\arctan x}{x} & x\in(-1,0)\cup(0,1)\end{cases}$

10. ① 对 $\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z)$, 取 $u(x,y,z)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}z^2$,

有 $\nabla u(x,y,z)=(x,y,z)=\vec{F}(x,y,z)$

即曲线积分与路径无关，且对应积分值可用原函数求出

对应 $W=u(x,y,z)\Big|_{(1,0,0)}^{(1,0,4\pi)}=\frac{1}{2}(4\pi)^2=8\pi^2$.

② 一般方法去解曲线积分

$$W=\int_L \vec{F}\,d\vec{s}=\int_L x\,dx+y\,dy+z\,dz \qquad (d\vec{s}=(dx,dy,dz))$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos t\,d\cos t+\sin t\,d\sin t+2t\,d2t$$

$$=\int_0^{2\pi}(\cos t\cdot(-\sin t)+\sin t\cdot\cos t+2t\cdot 2)\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}4t\,dt=2t^2\Big|_0^{2\pi}=8\pi^2.$$

11. 用反证法。假设 $z(x,y)$ 在 D 上的最值在 D 的内部 D° 上取到

设取到最值的点为 (x_0,y_0)，则该点也必为极值点.

且在 D° 内 $z(x,y)$ 有连续二阶偏导，

有 $z'_x(x_0,y_0)=z'_y(x_0,y_0)=0$

再令 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0,y_0)=A$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=B$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0,y_0)=C$

由已知条件，$A+C=0$, $B\neq 0$

而由于多元函数极值的充分条件，(x_0,y_0) 为极值点时应有 $B^2-AC\leq 0$

但此时 $B^2-AC=B^2-A\cdot(-A)=B^2+A^2>0 \quad (B\neq 0)$

从而 (x_0,y_0) 不是极值点，产生矛盾.

又由于 z 在 D 上连续则必存在最值.

从而 $z(x,y)$ 在 D 上的最值不能在 D° 上，故只能在 ∂D 上取到.

12. 首先要读懂题，以及知道什么是旋度 rot.

$$rot(\vec{F}) = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$ （用Stokes公式联想记忆）

$$= \nabla \times \vec{F}$$ （∇为哈密顿算子）（$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$）

最后计算结果是向量，但我们对于积分不能考虑向量

（若等号成立，则等号右边的 $\oiint_S \vec{n} \times \vec{F} dS$ 结果是个向量，而对于第一类曲面积分，我们没办法按着向量去计算，也即整体算出对应结果）

此时我们考虑计算的是向量的三个分量，

即对于向量 (A, B, C)，分别乘上 $\vec{e_1} = (1,0,0)$，$\vec{e_2} = (0,1,0)$，$\vec{e_3} = (0,0,1)$

就变成了 A，B，C（点乘）

验证对应项相等，则两个向量相等。

简化讨论，只考虑 x 方向的分量（点乘 $\vec{e_1}$）

即考虑 $\oiint_S (\vec{n} \times \vec{F}) \cdot \vec{e_1} \, dS$

$$= \oiint_S (\vec{F} \times \vec{e_1}) \cdot \vec{n} \, dS$$ （混合积的性质）

$$= \iiint_M \nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{e_1}) \, dV$$ （Gauss公式）

（$\vec{n}$ 作为单位外法向量，也就是方向余弦）

（利用 ∇ 来写公式，也就是正常那种 $\frac{\partial \cdot}{\partial x} + \frac{\partial \cdot}{\partial y} + \frac{\partial \cdot}{\partial z}$）

$$= \iiint_M (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{e_1} \, dV$$ （混合积性质，去贴合旋度表达式）

$$= V(M)\cdot\left(\nabla\times\vec{F}(P_0')\right)\cdot\vec{e_1} \quad (\text{积分中值定理}, P_0'\in M)$$

则取极限有 $\lim\limits_{diam(M)\to 0^+}\dfrac{1}{V(M)}\oiint\limits_S(\vec{r}\times\vec{F})\cdot\vec{e_1}\,dS$

$$=\lim_{diam(M)\to 0^+}\left(\nabla\times\vec{F}(P_0')\right)\cdot\vec{e_1}=\lim_{diam(M)\to 0^+}\left(\nabla\times\vec{F}(P_0)\right)\cdot\vec{e_1}$$

$$=rot\,\vec{F}(P_0)\cdot\vec{e_1} \qquad (M\text{很小可看成只有}P_0\text{点})$$

类似地，对点乘 $\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ 也成立

则由 $\overrightarrow{rot(\vec{F})}\Big|_{P_0}=\left(rot\,\vec{F}(P_0)\cdot\vec{e_1},\ rot\,\vec{F}(P_0)\cdot\vec{e_2},\ rot\,\vec{F}(P_0)\cdot\vec{e_3}\right)$

$$=\lim_{diam(M)\to 0^+}\frac{1}{V(M)}\left(\oiint\limits_S(\vec{r}\times\vec{F})\cdot\vec{e_1}\,dS,\ \oiint\limits_S(\vec{r}\times\vec{F})\cdot\vec{e_2}\,dS,\ \oiint\limits_S(\vec{r}\times\vec{F})\cdot\vec{e_3}\,dS\right)$$

$$=\lim_{diam(M)\to 0^+}\frac{1}{V(M)}\oiint\limits_S\vec{r}\times\vec{F}\,dS$$

得证.

浙江大学 2021-2022 学年 春夏 学期

《微积分（甲）II》课程期末考试答案

来源：微信公众号“路老师的 nonsense collection”

1、对 $f(x)=1+\arctan x$，$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n$

（参考 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$）　此时应有 $|x^2|<1$

则 $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt$

$$=1+\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}(-t^2)^n dt$$

$$=1+\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x(-t^2)^n dt$$

$$=1+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}dt$$

$$=1+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^x\right)$$

$$=1+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

由于 $|x^2|<1$，则对应此时 $-1<x<1$

即 $f(x)=1+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，$-1<x<1$

则对应收敛半径为1.

2、设相交部分为 S，其在 xOy 面上的投影区域为 $D:\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$

则 $m=\iint_S e\,dS=e\iint_D\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dx\,dy$

$$=e\iint_D\sqrt{1+y^2+x^2}\,dx\,dy$$ （这里 $z=xy$，进行偏导）

$$=e\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1+r^2}\,r\,dr$$ （转化为极坐标）

$$=2\pi e\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{1+r^2}\,d(r^2+1)$$

$$=\pi e\cdot\frac{2}{3}(r^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$$

$$=\pi e\cdot\left[\frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}}-1)\right]=\frac{2}{3}\pi e(2\sqrt{2}-1)$$

3、由已知，$x'(t)=\cos t-t\sin t,\ y'(t)=\sin t+t\cos t,\ z'(t)=1$

则 $I_1=\int_L\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,ds$

$$=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\pi^2-2}}\sqrt{t^2\cos^2t+t^2\sin^2t+t^2}\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$$

$$=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\pi^2-2}}\sqrt{2t^2}\cdot\sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1^2}\,dt$$

$$=\sqrt{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\pi^2-2}}t\sqrt{\cos^2t+\sin^2t+t^2\sin^2t+t^2\cos^2t-2t\sin t\cos t+2t\sin t\cos t+1}\,dt$$

$$=\sqrt{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\pi^2-2}}t\sqrt{2+t^2}\,dt$$

$$\underline{\underline{(u=t^2)}}\ \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{2}^{\pi^2-2}\sqrt{2+u}\,du$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{2}^{\pi^2-2}\sqrt{2+u}\,d(2+u)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{3}(2+u)^{\frac{3}{2}}\Big|_{2}^{\pi^2-2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\left((\pi^2)^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}(\pi^3-8)$$

4、令 $P=\frac{-y}{4x^2+y^2}$, $Q=\frac{x}{4x^2+y^2}$

则 $\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{4x^2+y^2-y\cdot 2y}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{4x^2+y^2-x\cdot 8x}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$

而此时不包括原点，但 C 中包含原点.

此时令 $C_0: 4x^2+y^2=\varepsilon^2$, 且 C_0 为逆时针方向, $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$

则 C 与 C_0 所围的有界闭区域 D 为单连通区域

由格林公式, $\oint_{C\cup C_0^-} Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$

其中 C_0^- 为顺时针方向，则 $\int_C Pdx+Qdy+\int_{C_0^-}Pdx+Qdy=0$

因此有 $I_2=\int_C Pdx+Qdy=\int_{C_0}Pdx+Qdy$

由于 $C_0: 4x^2+y^2=\varepsilon^2$, 利用参数方程变化有 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\varepsilon\cos\theta\\ y=\varepsilon\sin\theta\end{cases}$

则 $I_2=\int_{C_0}\frac{-ydx+xdy}{\varepsilon^2}$

$=\int_0^{2\pi}\frac{-\varepsilon\sin\theta\, d\frac{1}{2}\varepsilon\cos\theta+\frac{1}{2}\varepsilon\cos\theta\, d\varepsilon\sin\theta}{\varepsilon^2}$

$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$

$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta$

$=\pi$.

5、在曲面S上有 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，

则 $z_x' = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

$z_y' = \dfrac{-2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} = -\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

且S取外侧，故法向为 $(-z_x', -z_y', 1)$

则 $J = \iint\limits_S z^3 dxdy = \iint\limits_D (0,0,z^3)\cdot(-z_x', -z_y', 1)\,dxdy$

$= \iint\limits_D z^3\,dxdy$

$= \iint\limits_D (1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\,dxdy$

其中D为S在xOy面上的投影，则 $D: \{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$

有 $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{3}{2}}\cdot r\,dr$

$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 (1-r^2)^{\frac{3}{2}}\,dr^2$

$= -\frac{\pi}{4}\int_0^1 (1-r^2)^{\frac{3}{2}}\,d(1-r^2)$

$= -\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{5}(1-r^2)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1$

$= -\frac{\pi}{4}\cdot\left(0-\frac{2}{5}\right) = \frac{\pi}{10}$.

6. 首先，$f(x)$ 的定义域为 R.

且由于 $\cos x = \cos(-x)$，则 $f(x) = f(-x)$，$f(x)$ 为偶函数

则有 $b_n = 0$ （即为余弦级数）

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx$，$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx \ (n \geq 1)$

这时只需考虑在 $[0,\pi]$ 上 $f(x)$ 的取值.

$x \in [0,\pi]$ 时 $\cos x \in [-1,1]$，设 $t = \arcsin(\cos x)$

则 $\sin t = \cos x$，且 $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

此时有 $\sin t = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ 或 $\sin t = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$ （利用 sin 与 cos 的诱导公式进行转换）

有 $t = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi$ 或 $t = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi$，$k \in Z$

由 x 与 t 的范围，则 $t = \frac{\pi}{2} - x$

即 $0 \leq x \leq \pi$ 时，$f(x) = \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$

从而 $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi}{2} - x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}x^2\Big|_0^\pi\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\cdot\pi - \frac{1}{2}\pi^2\right) = 0$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos nx\,dx \\
&= \int_0^\pi \cos nx\,dx - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx \\
&= \frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^\pi - \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi x\,d\sin nx = -\frac{2}{n\pi}\left(x\sin nx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin nx\,dx\right) \\
&= \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \sin nx\,dx \\
&= -\frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^\pi = -\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) \\
&= \frac{2[1-(-1)^n]}{n^2\pi} \quad (n \geq 1)
\end{aligned}
$$

则 $f(x)$ 的Fourier级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2[1-(-1)^n]}{n^2\pi}\cos nx$，

利用 $1-(-1)^n=\begin{cases}0, & n为偶\\ 2, & n为奇\end{cases}$

则 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2[1-(-1)^n]}{n^2\pi}\cos nx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4}{(2n+1)^2\pi}\cos(2n+1)x$.

(偶数项不考虑，只考虑奇数项)

由于 $f(x)$ 连续，由狄利克雷收敛定理，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4}{(2n+1)^2\pi}\cos(2n+1)x,\quad x\in\mathbb{R}$$

令 $x=1$，有 $f(1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\cos(2n+1)}{(2n+1)^2}$

且此时 $f(1)=\frac{\pi}{2}-1$ （利用 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的表达式）

则 $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)}{(2n+1)^2}=\frac{\pi}{2}-1$

即 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}$.

---

7. 对 $u=x+y+z$，$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=1>0$

则在 B 的内部无极值点（因为无驻点），故不取最值.

则最值必在边界 $x^2+y^2+z^2=1$ 上取得，

令 $L(x,y,z,\lambda)=x+y+z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$ （求条件极值）

则 $\begin{cases}L_x'=1+2\lambda x=0\\ L_y'=1+2\lambda y=0\\ L_z'=1+2\lambda z=0\\ L_\lambda'=x^2+y^2+z^2-1=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt3}{3}\\ y=\frac{\sqrt3}{3}\\ z=\frac{\sqrt3}{3}\\ \lambda=-\frac{\sqrt3}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt3}{3}\\ y=-\frac{\sqrt3}{3}\\ z=-\frac{\sqrt3}{3}\\ \lambda=\frac{\sqrt3}{2}\end{cases}$

对应驻点 $P_1(\frac{\sqrt3}{3},\frac{\sqrt3}{3},\frac{\sqrt3}{3})$，$P_2(-\frac{\sqrt3}{3},-\frac{\sqrt3}{3},-\frac{\sqrt3}{3})$

则在 P_1 处 $u|_{P_1}=\frac{\sqrt3}{3}+\frac{\sqrt3}{3}+\frac{\sqrt3}{3}=\sqrt3$；在 P_2 处 $u|_{P_2}=-\frac{\sqrt3}{3}-\frac{\sqrt3}{3}-\frac{\sqrt3}{3}=-\sqrt3$

由实际情况，u 必存在最值，则对应

$u_{max}=\sqrt3$ （在 P_1 处），$u_{min}=-\sqrt3$ （在 P_2 处）.

8、(1) 用方向导数的定义去求，

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{f(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha)-f(0,0)}{\rho} \quad ((\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha)\text{即}\rho\vec{l})$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\frac{\rho\cos\alpha\,\rho\sin\alpha}{\sqrt{\rho^2\cos^2\alpha+\rho^2\sin^2\alpha}}-0}{\rho}$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2\cos\alpha\sin\alpha}{\rho\sqrt{\rho^2}} = \cos\alpha\sin\alpha\ ,\quad \alpha\in[0,2\pi)$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$

$\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0$，则 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$

则 $\displaystyle\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)\cdot x-f'_y(0,0)\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{xy}{x^2+y^2}$

对 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$，

当沿着 $y=x$ 方向趋于0时

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$

当沿着 $y=0$ 方向趋于0时，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{0}{x^2} = 0$$

二者不相等，则 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在

即 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)\cdot x-f'_y(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 不存在

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

9.(1) 由 $z=z(x,y)$，对 $g(x-z,y-2z)=0$ 的两边分别对 x,y 求导有

$$\begin{cases} g_1'\cdot(1-z_x')+g_2'\cdot(-2z_x')=0 \\ g_1'\cdot(-z_y')+g_2'\cdot(1-2z_y')=0 \end{cases}$$

则 $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=z_x'=\frac{g_1'}{g_1'+2g_2'}$ （$g_1'+2g_2'\neq 0$ 题中已给出）

$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=z_y'=\frac{g_2'}{g_1'+2g_2'}$

因此对 $\forall (x,y)\in D$，$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)+2\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=\frac{g_1'+2g_2'}{g_1'+2g_2'}=1$.

(2) 令 $F(x,y,z)=g(x-z,y-2z)=0$

则对应曲面上点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面法向量

$\vec{n}=\left(F_x'(x_0,y_0,z_0),\ F_y'(x_0,y_0,z_0),\ F_z'(x_0,y_0,z_0)\right)$

又 $F_x'=g_1'\cdot 1+g_2'\cdot 0=g_1'$

$F_y'=g_1'\cdot 0+g_2'\cdot 1=g_2'$

$F_z'=g_1'\cdot(-1)+g_2'\cdot(-2)=-g_1'-2g_2'$

又 $\vec{n}\cdot\vec{l}=(F_x',F_y',F_z')\cdot(1,2,1)$

$=F_x'+2F_y'+F_z'$

$=g_1'+2g_2'+(-g_1'-2g_2')=0$

则 $\vec{n}\perp\vec{l}$

则命题成立.

10、由题，$a_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{1}{2}$

利用保号性，$\exists N\in N_+$，对 $\forall n\geq N$ 有 $n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>\frac{1}{4}>0$ 成立。

（$\frac{1}{4}$ 的取得是利用 $\frac{1}{2}$ 的取半，实际上这个将 $\frac{1}{2}$ 变为任意正数都可以有类似操作，本质上是利用极限定义的 $\varepsilon-N$ 语言，

对 $\forall n\geq N$ 令 $\varepsilon=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 有 $\left|n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{4}$，从而转化得上述结论）

那么对 $\forall n\geq N$，有 $\frac{a_n}{a_{n+1}}>1+\frac{1}{4n}>1$ 成立

即从第 N 项起，$\{a_n\}$ 是单调递减的。

（接下来就要说明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ 了，这里呈现两种方法）

---

(1) 由于 $\frac{a_n}{a_{n+1}}>1+\frac{1}{4n}$ 对 $\forall n\geq N$

那么 $a_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdots\cdots\frac{a_{N+1}}{a_N}\cdot a_N$

$$=\frac{a_N}{\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\cdots\cdot\frac{a_N}{a_{N+1}}}$$

$$<\frac{a_N}{\left(1+\frac{1}{4n}\right)\left(1+\frac{1}{4(n-1)}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{4N}\right)}$$

$$<\frac{a_N}{1+\frac{1}{4N}+\frac{1}{4(N+1)}+\cdots+\frac{1}{4(n-1)}+\frac{1}{4n}}$$

（类比 $(1+a)(1+b)>1+a+b$ 因为这里加的项都是正的）

而 $n\to\infty$ 时，由调和级数可知，

$$\frac{1}{4}\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k}\to+\infty$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_N}{1+\frac{1}{4}\sum\limits_{k=N}^{n}\frac{1}{k}}=0$ 又 $a_{n+1}>0$

由夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

再由莱布尼茨判别法可知，交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ 收敛

(2) 把 n 写成 $\frac{1}{\frac{1}{n}}$，原题所给极限即为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{a_n}{a_{n+1}}-1}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$

再参考极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$ （往分子的角度找类似看-1部分）

此时找一个小于已知 $\frac{1}{4}$ 的极限，对 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{5}}-1\right]=\frac{1}{5}<\frac{1}{4}$

则 $\exists N_0\in N_+$，对 $n\geq N_0$，有 $n\left[(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{5}}-1\right]<\frac{1}{4}$ 成立（参考极限定义得到）

即 $(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{5}}<1+\frac{1}{4n}<\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ （这里相当于要把 a_n 与显式进行结合考虑）

则有 $n^{\frac{1}{5}}a_n>(n+1)^{\frac{1}{5}}a_{n+1}>0$ 成立，故数列 $\{n^{\frac{1}{5}}a_n\}$ 收敛（单调减有下界0）

设 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{5}}a_n=M$，则 $M\geq 0$ 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{5}}}\cdot\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{5}}a_n=0\cdot M=0$

再由莱布尼茨判别法可知，交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ 收敛

11. 先令 $M=\max\limits_{(x,y)\in D}\sqrt{\left[\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right]^2+\left[\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right]^2}$

考虑到要证的左侧没有偏导，那么需要进行构造

（一元时候构造出导数可以用拉格朗日中值定理，利用一个初值，而这里可以利用 $f|_{\partial D}=0$ 当作一个初值考虑）

由于 $D: x^2+y^2\leq 1$，则由 $f|_{\partial D}=0$，用极坐标变换有

$f(\cos\theta,\sin\theta)=0$ 对 $\forall\theta\in[0,2\pi)$ 均成立.

令 $g(r)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ （这里把二元函数降为一元考虑，
$\quad\;\;=f(x,y)$ 不考虑 θ 这个变量）

则 $g(1)=0=f(\cos\theta,\sin\theta)$ （此时 $r\in[0,1]$）

由拉格朗日中值定理，$\dfrac{g(r)-g(1)}{r-1}=g'(\xi)$

其中 $\xi\in(r,1)$．则 $f(x,y)=g(r)=(r-1)g'(\xi)$

再考虑 $g'(r)=f_1'(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot\cos\theta+f_2'(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot\sin\theta$

$$=\cos\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)+\sin\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) \qquad (z=f(x,y))$$

（利用对一元函数的求导得到二元函数偏导相关的式子）

则 $|g'(r)|=\left|\cos\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)+\sin\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right|$

$$\leq\sqrt{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right)^2\right]} \quad \text{（柯西不等式）}$$

$$=\sqrt{\left[\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right]^2+\left[\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right]^2}\leq M$$

对 $\forall r\in(0,1)$ 均成立.

因此 $\left|\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy\right|=\iint\limits_D |f(x,y)|\,dxdy$

$$=\iint\limits_D |r-1||g'(\xi)|\,dxdy$$

$$\leq\iint\limits_D |r-1|\cdot M\,dxdy.$$

$$=M\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r(1-r)\,dr$$

$$=M\cdot 2\pi\cdot\int_0^1 r-r^2\,dr$$

$$=2\pi M\cdot\left(\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{3}r^3\right)\Big|_0^1$$

$$=2\pi M\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{3}M=\frac{\pi}{3}\max_{(x,y)\in D}\sqrt{\left[\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right]^2+\left[\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right]^2}$$

即原式得证.

12. 首先 $\overrightarrow{grad}(f)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$

而 $div(f\cdot\overrightarrow{grad}(f))=div\left(f\frac{\partial f}{\partial x},f\frac{\partial f}{\partial y},f\frac{\partial f}{\partial z}\right)$

$=\frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(f\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(f\frac{\partial f}{\partial z}\right)$ （散度定义）

$=f\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+f\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+f\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2$

$=f\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2=2f$

且 $\|\overrightarrow{grad}(f)\|^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2=f$

代入上述散度的式子中有

$f\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)=f$，且 $f(x,y,z)\neq 0$

则 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=1$

此时 $\oiint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}dS=\oiint_S\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)dS$

$=\oiint_{S^+}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dydz+\frac{\partial f}{\partial y}dzdx+\frac{\partial f}{\partial z}dxdy\right)$

（利用一二类曲面积分转化，此时 S^+ 为 S 的正向）

$=\iiint_M\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)dxdydz$ （高斯公式）

$=\iiint_M 1\,dxdydz$

$=V(M)$，得证.

浙江大学 2022-2023 学年 春夏 学期

《微积分（甲）II》课程期末考试答案

来源：微信公众号“路老师的 nonsense collection”

1、由题 $\vec{AB}=(-1,2,2)$, $\vec{AC}=(1,2,3)$, $\vec{AD}=(-2,1,p)$

由于 A,B,C,D 四点共面，则 $(\vec{AB}\times\vec{AC})\cdot\vec{AD}=0$

即有 $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & p \end{vmatrix}=0$

则 $[-2p+2+(-12)]-[-8+(-3)+2p]=(-2p-10)-(2p-11)=-4p+1=0$

解得 $p=\frac{1}{4}$

从而 $\vec{AD}=(-2,1,\frac{1}{4})$

又 $\vec{AC}\times\vec{AD}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & \frac{1}{4} \end{vmatrix}=(\frac{1}{2}-3)\vec{i}-[\frac{1}{4}-(-6)]\vec{j}+[1-(-4)]\vec{k}$

$=(-\frac{5}{2},-\frac{25}{4},5)\neq\vec{0}$

因此 A,C,D 三点不共线.

2、由题，先计算直线和球之间的位置关系.

则所给球的球心 $A(2,3,-1)$，半径 $r=\sqrt{9}=3$,

直线过点 $B(-1,-1,-1)$，方向向量 $\vec{l}=(3,4,12)$

从而A到直线的距离 $d=\dfrac{|\vec{AB}\times\vec{l}|}{|\vec{l}|}$

又 $\vec{AB}=(-3,-4,0)$，则 $\vec{AB}\times\vec{l}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & -4 & 0\\ 3 & 4 & 12\end{vmatrix}=(-48-0)\vec{i}-(-36-0)\vec{j}+[-12-(-12)]\vec{k}$

$=(-48,36,0)$

从而 $d=\dfrac{|(-48,36,0)|}{|(3,4,12)|}=\dfrac{12|(-4,3,0)|}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}}=\dfrac{12\sqrt{3^2+(-4)^2}}{\sqrt{9+16+144}}=\dfrac{12\sqrt{25}}{\sqrt{169}}=\dfrac{60}{13}$

因此 $d>r$，从而球与直线相离

则所求MN长最小值为 $d-r=\dfrac{60}{13}-3=\dfrac{21}{13}$

3、设旋转曲面上一点 $P(x,y,z)$ 由点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 旋转得到.

且P_0在已知曲线上.

由绕z轴旋转得 $\begin{cases}x^2+y^2=x_0^2+y_0^2\\ z=z_0\end{cases}$

又P_0在曲线上有 $\begin{cases}x_0=\sqrt{t}\\ y_0=t^3\\ z_0=t^{\frac{3}{2}}\end{cases}$ 代入得 $\begin{cases}x^2+y^2=t+t^6\\ z=t^{\frac{3}{2}}\end{cases}$

从而 $x^2+y^2=z^{\frac{2}{3}}+z^4$

又 $t\geq 0$，则 $z\geq 0$.

即旋转曲面方程为 $x^2+y^2=z^{\frac{2}{3}}+z^4$，$z\geq 0$.

---

4. $\alpha=0$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，由于 $a_n=\frac{1}{n}>0$，

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ 且 $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}<a_n$ 对 $\forall n\in N_+$ 均成立

由Leibniz判别法则级数收敛

又 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散，从而此时原级数条件收敛

$\alpha>0$ 时，考虑 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{\alpha\ln n}{n}\right)^n}{\frac{1}{n^\alpha}} \xlongequal{x=\frac{1}{n}} \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\left(1-\alpha x\ln\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{(1+\alpha x\ln x)^{\frac{1}{x}}}{x^\alpha}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+\alpha x\ln x)}}{e^{\alpha\ln x}}=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{\ln(1+\alpha x\ln x)-\alpha x\ln x}{x}}$$

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$

且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-(1+x)}{2x(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2}$

则 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+\alpha x\ln x)-\alpha x\ln x}{\alpha^2x^2\ln^2x}=-\frac{1}{2}$

有 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+\alpha x\ln x)-\alpha x\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+\alpha x\ln x)-\alpha x\ln x}{\alpha^2x^2\ln^2x}\cdot\alpha^2x\ln^2x$

且 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln^2x=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln^2x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-2\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$

因此 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+\alpha x\ln x)-\alpha x\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+\alpha x\ln x)-\alpha x\ln x}{\alpha^2x^2\ln^2x}\cdot\lim\limits_{x\to0^+}\alpha^2x\ln^2x=0$

从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{\alpha\ln n}{n}\right)^n}{\frac{1}{n^\alpha}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+\alpha x\ln x)-\alpha x\ln x}{x}}=e^0=1$

有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{n}\left(1-\frac{\alpha\ln n}{n}\right)^n}{\frac{1}{n^{\alpha+1}}}=1$ 成立,

又 $\alpha>0$ 时 $\alpha+1>1$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}$ 收敛

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(1-\frac{\alpha\ln n}{n}\right)^n$ 收敛

从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(1-\frac{\alpha\ln n}{n}\right)^n$ 绝对收敛.

综上，$\alpha=0$ 时原级数条件收敛；$\alpha>0$ 时原级数绝对收敛

---

5. 将 $x=\frac{1}{2}\sqrt{4y^2+3z^2-4}$ 代入 $z=x^2-y^2$ 中有

$z=\frac{1}{4}(4y^2+3z^2-4)-y^2=\frac{3}{4}z^2-1$

即 $3z^2-4z-4=0$，解得 $z=2$ 或 $z=-\frac{2}{3}$

又 $z\geq0$，则舍去 $z=-\frac{2}{3}$.

因此曲线 C 还可写成 $C:\begin{cases}x^2-y^2=2\\ z=2\end{cases}$，此时有 $x\geq0$（根号的定义）

设 $P(x_0,y_0,z_0)$，则有 $z_0=2$，$x_0^2-y_0^2=2$ 成立.

对 $F(x,y,z)=x^2-y^2-2=0$，$G(x,y,z)=z-2=0$

$F_x'=2x$，$F_y'=-2y$，$F_z'=0$，$G_x'=0=G_y'$，$G_z'=1$

从而 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}F_y' & F_z'\\ G_y' & G_z'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2y & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-2y$

$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}=\begin{vmatrix}F_z' & F_x'\\ G_z' & G_x'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 2x\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2x$

$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}F_x' & F_y'\\ G_x' & G_y'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x & -2y\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$

则在P处切线的方向向量

$$\vec{T}_P=\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\Big|_P,\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\Big|_P,\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\Big|_P\right)=(-2y_0,-2x_0,0)$$

又平面法向量 $\vec{n}=(3,-1,2)$，且切线L与平面平行

所以有 $\vec{T}_P\perp\vec{n}$，即 $\vec{T}_P\cdot\vec{n}=-6y_0+2x_0+0=0$

从而 $x_0=3y_0$，代入 $x_0^2-y_0^2=2$，有 $y_0^2=\frac{1}{4}$，

又 $x_0>0$ 则 $y_0>0$ 解得 $y_0=\frac{1}{2}$ 从而 $x_0=\frac{3}{2}$

则点 $P(\frac{3}{2},\frac{1}{2},2)$，$\vec{T}_P=(-1,-3,0)$

对应L的方程为 $\frac{x-\frac{3}{2}}{-1}=\frac{y-\frac{1}{2}}{-3}=\frac{z-2}{0}$.

---

6. 对 $f(x)=\arcsin(2x)$，$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot 2=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$，$|x|<\frac{1}{2}$.

又因为 $\frac{1}{\sqrt{1-x}}=(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-x)^n$

$$=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{n!\,2^n}\cdot(-1)^n x^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n,\quad |x|<1$$

则 $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}=2\left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(4x^2)^n\right]$

$$=2+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\quad |x|<\frac{1}{2}$$

又 $f(0)=0$，则利用积分有

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\,dt+f(0)=\int_0^x\left[2+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right]dt$$

$$=2x+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1},\quad |x|<\frac{1}{2}$$

再考虑边界，$x=\frac{1}{2}$ 时级数化为 $1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}$

$x=-\frac{1}{2}$ 时级数化为 $1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}\cdot\frac{(-1)^{2n+1}}{2^{2n+1}}=1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}$

总之，即只需考虑级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}$

由 Wallis 公式，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\sqrt{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\sqrt{2n+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{\pi}}$

注意： 这里 **Wallis** 公式的具体证明就略去了，可以参考教材，或者直接由 **Wallis** 那个计算积分的公式利用 **n** 次和 **n-2** 次两个积分的关系，再利用夹逼定理推出。

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!!\sqrt{n}}{(2n)!!}\cdot\dfrac{n}{2n+1}=\sqrt{\dfrac{1}{\pi}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}$

且级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛，

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$ 收敛，

即 $x=\pm\frac{1}{2}$ 时对应幂级数收敛，

从而 $f(x)=2x+2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{4^n(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}$ ， $|x|\leq\frac{1}{2}$.

由展开式，考虑 x^7 项对应系数 a_7 ，则 $f^{(7)}(0)=7!a_7$

又此时 $2n+1=7$ 得 $n=3$ ，从而有

$$a_7=2\cdot\frac{4^3\cdot(2\times3-1)!!}{(2\times3+1)(2\times3)!!}=\frac{2\times4^3\times5\times3}{7\times6\times4\times2}=\frac{40}{7}$$

则 $f^{(7)}(0)=7!a_7=7\times720\times\frac{40}{7}=28800$

---

7. 对 $f(x,y)=\frac{1}{9}x^3+24y^3-\frac{1}{3}xy$ ，

$f_x'(x,y)=\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}y$ ， $f_y'(x,y)=72y^2-\frac{1}{3}x$

当 $f_x'(x,y)=f_y'(x,y)=0$ 时，

则 $B^2-AC=\frac{1}{9}>0$ ，故 $(0,0)$ 不是极值点.

对驻点 $(\frac{1}{6},\frac{1}{36})$ ，

$A=f_{xx}''(\frac{1}{6},\frac{1}{36})=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$ ， $B=f_{xy}''(\frac{1}{6},\frac{1}{36})=-\frac{1}{3}$ ， $C=f_{yy}''(\frac{1}{6},\frac{1}{36})=\frac{144}{36}=4$

$B^2-AC=\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\times4=-\frac{1}{3}<0$ ，又 $A>0$

对应极小值 $f(\frac{1}{6},\frac{1}{36})=\frac{1}{9}\cdot(\frac{1}{6})^3+24\cdot(\frac{1}{36})^3-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{36}$

$$=\frac{1}{3^2\cdot 6^3}+\frac{24}{6^6}-\frac{1}{3\cdot 6^3}$$

$$=\frac{1-3}{3^2\cdot 6^3}+\frac{4}{6^3\cdot 6^2}=\frac{-2}{3^2\cdot 6^3}+\frac{1}{3^2\cdot 6^3}=\frac{-1}{9\times 216}=-\frac{1}{1944}$$

---

8. 利用全微分可知，$f_x'(1,1)=1$, $f_y'(1,1)=-2$.

又对 $u=f(\frac{r}{s},\frac{s}{t})$, 有三个自变量 r,s,t, 分别求偏导

$$\frac{\partial u}{\partial r}=f_1'(\frac{r}{s},\frac{s}{t})\cdot\frac{1}{s}+0=\frac{1}{s}f_1'(\frac{r}{s},\frac{s}{t})$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}=f_1'(\frac{r}{s},\frac{s}{t})\cdot r\cdot(-\frac{1}{s^2})+f_2'(\frac{r}{s},\frac{s}{t})\cdot\frac{1}{t}=-\frac{r}{s^2}f_1'(\frac{r}{s},\frac{s}{t})+\frac{1}{t}f_2'(\frac{r}{s},\frac{s}{t})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0+f_2'(\frac{r}{s},\frac{s}{t})\cdot s\cdot(-\frac{1}{t^2})=-\frac{s}{t^2}f_2'(\frac{r}{s},\frac{s}{t})$$

又 $f_x'(1,1)=f_1'(1,1)$, $f_y'(1,1)=f_2'(1,1)$

则 $\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{(1,1,1)}=1\cdot f_1'(1,1)=1$, $\frac{\partial u}{\partial s}\Big|_{(1,1,1)}=-1\cdot f_1'(1,1)+1\cdot f_2'(1,1)=-1-2=-3$

$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{(1,1,1)}=-1\cdot f_2'(1,1)=2$

从而 $du\Big|_{(1,1,1)}=\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{(1,1,1)}dr+\frac{\partial u}{\partial s}\Big|_{(1,1,1)}ds+\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{(1,1,1)}dt$

$$=du-3ds+2dt$$

---

9. 因为 $\frac{\partial g}{\partial x}=yg'(xy)$, $\frac{\partial g}{\partial y}=xg'(xy)$

则 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot\frac{\partial g}{\partial x}=f_1'+yf_2'g'(xy)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=f_{11}''\cdot 0+f_{12}''\cdot\frac{\partial g}{\partial y}+f_2'g'(xy)+yf_2'\cdot xg''(xy)$$
$$+yg'(xy)\left[f_{21}''\cdot 0+f_{22}''\frac{\partial g}{\partial y}\right]$$

(写成这样就行了) $=xf_{12}''g'(xy)+f_2'g'(xy)+xyf_2'g''(xy)+xyf_{22}''[g'(xy)]^2$

10、由题，要使积分取到最大值，则被积函数在区域D内应恒不为负，

即在D内应有 $4-2x^2-y^2\geq 0$

从而 $D_0=\{(x,y)\in R^2 \mid 4-2x^2-y^2\geq 0\}$

此时在D_0内令 $x=\sqrt{2}r\cos\theta$，$y=2r\sin\theta$，

即有 $2x^2+y^2=2(2r^2\cos^2\theta)+(2r\sin\theta)^2=4r^2\leq 4$

从而 $0\leq r\leq 1$，$0\leq\theta\leq 2\pi$.

$$I(D_0)=\iint_{D_0}(4-2x^2-y^2)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(4-4r^2)2\sqrt{2}\,r\,dr$$

$$=2\pi\cdot 8\sqrt{2}\int_0^1(1-r^2)r\,dr=16\sqrt{2}\pi\int_0^1(r-r^3)\,dr$$

$$=16\sqrt{2}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4\right)\Big|_0^1=16\sqrt{2}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=4\sqrt{2}\pi.$$

---

11. $\varphi(t)=\int_1^{t^2}dx\int_{\sqrt{x}}^{t}\sin\frac{x}{y}\,dy$，此时 $1\leq x\leq t^2$，$\sqrt{x}\leq y\leq t$

从而有 $x\leq y^2$，$1\leq\sqrt{x}\leq y\leq t$.

则 $\varphi(t)=\int_1^{t}dy\int_1^{y^2}\sin\frac{x}{y}\,dx$

$$=\int_1^t\left(-y\cos\frac{x}{y}\right)\Big|_1^{y^2}dy=\int_1^t\left[-y\cos y-\left(-y\cos\frac{1}{y}\right)\right]dy$$

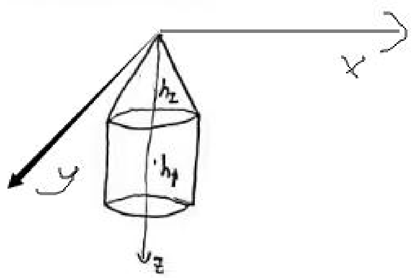
$$=\int_1^t\left(y\cos\frac{1}{y}-y\cos y\right)dy$$

因此 $\varphi'(t)=t\cos\frac{1}{t}-t\cos t$

代入 $t=\pi$，$\varphi'(\pi)=\pi\cos\frac{1}{\pi}-\pi\cos\pi=\pi\left(1+\cos\frac{1}{\pi}\right)$

12、以圆锥的顶点为原点，该物体中心轴向下为z轴正方向

建立空间直角坐标系.



考虑质心 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，利用对称性 $\bar{x}=\bar{y}=0$

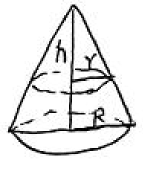
且由已知条件，$\bar{z}=h_2$.

此时设底面半径为R.

则 $\iiint_V dV=\pi R^2\cdot h_1+\frac{1}{3}\pi R^2\cdot h_2=\pi R^2\left(h_1+\frac{1}{3}h_2\right)$（两体积相加）

再计算 $\iiint_V z\,dV$，此时考虑分为 $0\le z\le h_2$ 与 $h_2\le z\le h_1+h_2$ 两部分

对 $0\le z\le h_2$ 部分，为一圆锥.



则 $z=h$ 时，此时设 $x^2+y^2\le r^2$，$r>0$

利用圆锥性质有 $\dfrac{r}{R}=\dfrac{h}{h_2}$

$$r=\frac{R}{h_2}\cdot h$$

则在 $0\le z\le h_2$ 处，对每个 z 处有 $x^2+y^2\le \dfrac{R^2}{h_2^2}z^2$

又 $h_2\le z\le h_1+h_2$ 为圆柱，此时有 $x^2+y^2\le R^2$ 成立

则取 $D_1:\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le \frac{R^2}{h_2^2}z^2\}$，$D_2:\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le R^2\}$

有
$$\iiint_V z\,dV=\int_0^{h_2} z\,dz\iint_{D_1}dxdy+\int_{h_2}^{h_1+h_2} z\,dz\iint_{D_2}dxdy$$
$$=\int_0^{h_2} z\cdot\pi\frac{R^2}{h_2^2}z^2\,dz+\int_{h_2}^{h_1+h_2} z\cdot\pi R^2\,dz$$
$$=\pi\frac{R^2}{h_2^2}\cdot\int_0^{h_2}z^3dz+\pi R^2\int_{h_2}^{h_1+h_2}z\,dz$$
$$=\pi\frac{R^2}{h_2^2}\cdot\frac{1}{4}z^4\Big|_0^{h_2}+\pi R^2\cdot\frac{1}{2}z^2\Big|_{h_2}^{h_1+h_2}$$
$$=\frac{\pi R^2h_2^4}{4h_2^2}+\frac{\pi R^2}{2}\left[(h_1+h_2)^2-h_2^2\right]$$
$$=\frac{\pi R^2h_2^2}{4}+\frac{\pi R^2h_1^2}{2}+\pi R^2h_1h_2$$

则质心纵坐标 $\bar{z} = \dfrac{\iiint\limits_V z\,dV}{\iiint\limits_V dV} = \dfrac{\frac{\pi R^2 h_2^2}{4} + \frac{\pi R^2 h_1^2}{2} + \pi R^2 h_1 h_2}{\pi R^2 (h_1 + \frac{1}{3} h_2)}$

$= \dfrac{3h_2^2 + 6h_1^2 + 12h_1h_2}{12h_1 + 4h_2} = h_2$

则 $3h_2^2 + 6h_1^2 + 12h_1h_2 = 12h_1h_2 + 4h_2^2$,

$h_2^2 = 6h_1^2$ ，又 $h_1 > 0, h_2 > 0$

则 $h_2 = \sqrt{6} h_1$ ，从而 $h_1 : h_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}$

13、假设满足方程的连续函数不唯一.

即存在 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$，且 $f(x,y) \neq g(x,y)$

使得 $f(x,y) = 1 + \int_0^x du \int_0^y f(u,v)\,dv$,

$g(x,y) = 1 + \int_0^x du \int_0^y f(u,v)\,dv$.

取 $D_{uv} = \{(u,v) \mid 0 \le u \le x,\ 0 \le v \le y\}$, $h(x,y) = f(x,y) - g(x,y)$

则 $h(x,y) = 1 + \iint\limits_{D_{uv}} f(u,v)\,du\,dv - (1 + \iint\limits_{D_{uv}} g(u,v)\,du\,dv)$

$= \iint\limits_{D_{uv}} [f(u,v) - g(u,v)]\,du\,dv = \iint\limits_{D_{uv}} h(u,v)\,du\,dv$

又 $h(x,y)$ 在 D 内连续，D 为一有界闭区域.

则 $h(x,y)$ 在 D 上有界，即存在 $M \ge 0$ 使 $|h(x,y)| \le M$ 在 D 上恒成立.

因此 $|h(x,y)| = \left|\iint\limits_{D_{uv}} h(u,v)\,du\,dv\right| \le \iint\limits_{D_{uv}} |h(u,v)|\,du\,dv$

$\le M \iint\limits_{D_{uv}} 1\,du\,dv = M\int_0^x du \int_0^y dv = Mxy$

即对 $(x,y) \in D$，有 $|h(x,y)| \le Mxy$ 成立

重复上述过程,有

$$|h(x,y)| = \left|\iint_{D_{uv}} h(u,v)\,du\,dv\right| \le \iint_{D_{uv}} |h(u,v)|\,du\,dv$$

$$\le M\iint_{D_{uv}} uv\,du\,dv = M\int_0^x u\,du\int_0^y v\,dv = M\cdot\frac{x^2}{2}\cdot\frac{y^2}{2}$$

再重复,有

$$|h(x,y)| \le \iint_{D_{uv}} |h(u,v)|\,du\,dv \le M\iint_{D_{uv}} \frac{u^2}{2}\cdot\frac{v^2}{2}\,du\,dv$$

$$= M\int_0^x \frac{u^2}{2}du\cdot\int_0^y \frac{v^2}{2}dv = M\cdot\frac{x^3}{6}\cdot\frac{y^3}{6} = M\cdot\frac{x^3}{3!}\cdot\frac{y^3}{3!}$$

故猜想 $|h(x,y)| \le M\cdot\frac{x^n}{n!}\cdot\frac{y^n}{n!}$ 对任意正整数n均成立.

再利用数学归纳法证明.

$n=1$ 时已经证明.

假设$n=k$时不等式 $|h(x,y)| \le M\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{y^k}{k!}$ 成立,

则 $|h(x,y)| \le \left|\iint_{D_{uv}} h(u,v)\,du\,dv\right| \le \iint_{D_{uv}} |h(u,v)|\,du\,dv$

$$= M\cdot\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{y^{k+1}}{(k+1)!}$$

即 $n=k+1$ 时 成立.

综上 对 $\forall n\in N_+$ 均有 $|h(x,y)| \le M\frac{x^n}{n!}\frac{y^n}{n!}$ 成立.

又 $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, 则 $|h(x,y)| \le M\frac{x^n}{n!}\frac{y^n}{n!} \le \frac{M}{(n!)^2}$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M}{(n!)^2}=0$.

则应有 $|h(x,y)|\equiv 0$, $\forall (x,y)\in D$.

也即对任意 $(x,y)\in D$, $h(x,y)=0$, 即 $f(x,y)=g(x,y)$

从而与假设矛盾, 假设不成立

因此满足方程的连续函数是唯一的

浙江大学 2023-2024 学年 春夏 学期

《微积分（甲）II》课程期末考试答案

来源：微信公众号“路老师的 nonsense collection”

1、由题，直线上有一点 $P(1,2,5)$，记 $A(-1,1,4)$

有 $\vec{AP}=(2,1,1)$，且直线方向向量 $\vec{v}=(2,1,-1)$

则所求距离 $d=\dfrac{|\vec{v}\times\vec{AP}|}{|\vec{v}|}=\dfrac{|(2,1,-1)\times(2,1,1)|}{|(2,1,-1)|}$

$$=\frac{\left\|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&-1\\2&1&1\end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{|(1+1,-(2+2),0)|}{\sqrt{6}}$$

$$=\frac{|(2,-4,0)|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2^2+(-4)^2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{30}}{3}$$

2、由题 $f(x,y,z)$ 在 $(1,1,1)$ 处可微.

且 $f'_x(x,y,z)=3x^2y+z$，$f'_y(x,y,z)=x^3+2yz$，$f'_z(x,y,z)=y^2+x$

又 $|\vec{n}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$，则与 $\vec{n}$ 同方向的单位向量

$$\vec{n_0}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

从而 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial\vec{n}}\right|_{(1,1,1)}=f'_x(1,1,1)\cos\alpha+f'_y(1,1,1)\cos\beta+f'_z(1,1,1)\cos\gamma$

$$=(3+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+(1+2)\cdot0+(1+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

3、设 $F(x,y,z)=z-x^2-y^2=0$ 则 $F_x'=-2x$, $F_y'=-2y$, $F_z'=1$

设切平面 π 与曲面切点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$

从而切平面 π 的法向量 $\vec{n}=(F_x',F_y',F_z')|_{P_0}=(-2x_0,-2y_0,1)$

因为平面 π 与 x 轴平行，从而有 $\vec{n}\perp(1,0,0)$

则 $\vec{n}\cdot(1,0,0)=-2x_0=0$ 即 $x_0=0$

又平面 π 过点 $(0,1,0)$，则 π 方程可设为 $-2x_0x-2y_0(y-1)+z=0$

即 $-2y_0(y-1)+z=0$ 又 π 过切点 P_0，且 $z_0=x_0^2+y_0^2=y_0^2$

从而 $-2y_0(y_0-1)+y_0^2=0$ 解得 $y_0=0$ 或 $y_0=2$

当 $y_0=0$ 时，平面为 $z=0$，过 x 轴，不符题意.

因此 $y_0=2$，从而 π 方程为 $-4(y-1)+z=0$

即 $4y-z-4=0$

4. $z=\arctan\frac{y}{x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$. （这里不用混合偏导与求导次序无关的话要单独再求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 才能得到 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$）

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot y\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=-\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

从而 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,0)}=\frac{2}{2^2+0^2}=\underline{\frac{1}{2}}$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(2,0)}=\frac{0^2-2^2}{(2^2+0^2)^2}=\frac{-4}{4^2}=\underline{-\frac{1}{4}}$$

---

5. 由于 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

则 $\sum_{n=0}^{+\infty}2a_n=1-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

从而 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\underline{\frac{1}{8}}$

6.由于 $z=x^2+y^2,0\le z\le 6$ 在 xOy 平面上的投影

$$D_{xy}=\{(x,y)|\ x^2+y^2\le 6\}$$

且 $z_x'=2x,\quad z_y'=2y$

从而 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{1+4z}dS=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{1+4(x^2+y^2)}\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dxdy$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{1+4x^2+4y^2}\cdot\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt6}\frac{1}{\sqrt{1+4r^2}}r\,dr$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt6}\frac{dr^2}{\sqrt{1+4r^2}}$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{4}\int_0^{\sqrt6}\frac{d(1+4r^2)}{2\sqrt{1+4r^2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{1+4r^2}\Big|_0^{\sqrt6}=\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{1+4\times6}-\sqrt{1+0}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}(\sqrt{25}-1)=\underline{2\pi}$$

---

7. $\oint_L(2x+y)^2ds=\oint_L(4x^2+4xy+y^2)\,ds$

因为 $L:x^2+y^2=4$，利用对称性有 $\oint_L 4xy\,ds=0$

再利用轮换对称性，$\oint_L x^2ds=\oint_L y^2ds$

从而 $\oint_L(2x+y)^2ds=\oint_L(4x^2+y^2)ds=\oint_L(4x^2+x^2)ds$

$$=\frac{5}{2}\oint_L(x^2+y^2)ds=\frac{5}{2}\oint_L 4ds=\frac{5}{2}\cdot4\cdot2\pi\cdot2=\underline{40\pi}$$

8、$b_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 3x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-2\sin 3x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}3\sin 3x\,dx$

$=\frac{2}{3\pi}\cos 3x\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{\pi}\cos 3x\Big|_{0}^{\pi}$

$=\frac{2}{3\pi}\left[\cos 0-\cos(-3\pi)\right]-\frac{1}{\pi}(\cos 3\pi-\cos 0)$

$=\frac{2}{3\pi}\left[1-(-1)\right]-\frac{1}{\pi}(-1-1)=\frac{4}{3\pi}+\frac{2}{\pi}=\frac{10}{3\pi}$

由狄利克雷收敛定理，

$S(2\pi)=S(0)=\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{-2+3}{2}=\frac{1}{2}$

---

9. 利用平面束方程，设所求平面的方程为

$\lambda(7x-y-2z-8)+\mu(x-9y+8z-20)=0$，$\lambda,\mu$为常数且不同为0

整理有 $(7\lambda+\mu)x-(\lambda+9\mu)y+(-2\lambda+8\mu)z-(8\lambda+20\mu)=0$

由于所求平面与球面相切，则球心到该平面距离即为球半径.

又球心 $(1,-1,0)$，球半径 $r=\sqrt{2}$

且球心到所求平面距离 $d=\frac{|(7\lambda+\mu)+(\lambda+9\mu)-(8\lambda+20\mu)|}{\sqrt{(7\lambda+\mu)^2+(\lambda+9\mu)^2+(-2\lambda+8\mu)^2}}$

则有 $d=r$，有 $|-10\mu|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(49+1+4)\lambda^2+(1+81+64)\mu^2+(14+18-32)\lambda\mu}$

$10|\mu|=\sqrt{\frac{1}{2}(54\lambda^2+146\mu^2)}=\sqrt{27\lambda^2+73\mu^2}$

则 $100\mu^2=27\lambda^2+73\mu^2$ 有 $27\lambda^2=27\mu^2$

解得 $\lambda=\mu$ 或 $\lambda=-\mu$

代入 $\lambda=\mu$ 有 $8\lambda x-10\lambda y+6\lambda z-28\lambda=0$,

化简即 $4x-5y+3z-14=0$

代入 $\lambda=-\mu$ 有 $6\lambda x+8\lambda y-10\lambda z+12\lambda=0$

化简即 $3x+4y-5z+6=0$

从而所求平面方程为 $4x-5y+3z-14=0$ 或 $3x+4y-5z+6=0$

10、由题 $f'_x(x,y)=\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x(x+1)^2-(x^2+y^2)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$

$$=\frac{2}{x+1}+\frac{x(x+1)-(x^2+y^2)}{(x+1)^3}=\frac{2}{x+1}+\frac{x-y^2}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{2(x+1)^2+x-y^2}{(x+1)^3}$$

$f'_y(x,y)=\dfrac{1}{2(x+1)^2}\cdot 2y=\dfrac{y}{(x+1)^2}$

当 $f'_x(x,y)=f'_y(x,y)=0$ 时，则应有 $y=0$

从而 $2(x+1)^2+x=2x^2+5x+2=(2x+1)(x+2)=0$

解得 $x=-\frac{1}{2}$ 或 $x=-2$ 即驻点 $(-\frac{1}{2},0)$, $(-2,0)$

又因为 $f''_{xx}(x,y)=\dfrac{[4(x+1)+1](x+1)^3-3(x+1)^2[2(x+1)^2+x-y^2]}{(x+1)^6}$

$$=\frac{(4x+5)(x+1)-3(2x^2+5x+2-y^2)}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{4x^2+9x+5-(6x^2+15x+6-3y^2)}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{-2x^2-6x-1+3y^2}{(x+1)^4}$$

$f''_{xy}(x,y)=-\dfrac{2y}{(x+1)^3}$, $f''_{yy}(x,y)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

对驻点 $(-\frac{1}{2},0)$，$A=f''_{xx}(-\frac{1}{2},0)=\dfrac{-2\cdot(-\frac{1}{2})^2-6\cdot(-\frac{1}{2})-1+0}{(-\frac{1}{2}+1)^4}$

$$=\frac{-\frac{1}{2}+3-1}{(\frac{1}{2})^4}=16\times\frac{3}{2}=24$$

$B=f''_{xy}(-\frac{1}{2},0)=0$，$C=f''_{yy}(-\frac{1}{2},0)=\dfrac{1}{(-\frac{1}{2}+1)^2}=4$

从而 $B^2-AC=0-24\times4=-96<0$，且 $A>0$

从而 $f(x,y)$ 在 $(-\frac{1}{2},0)$ 处取极小值

$$f(-\tfrac{1}{2},0)=2\ln|-\tfrac{1}{2}+1|+\frac{(-\frac{1}{2})^2+0}{2(-\frac{1}{2}+1)^2}=2\ln\tfrac{1}{2}+\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$$

$$=\tfrac{1}{2}-2\ln2$$

对驻点 $(-2,0)$，$A=f''_{xx}(-2,0)=\dfrac{-2(-2)^2-6\cdot(-2)-1+0}{(-2+1)^4}=-8+12-1=3$

$B=f''_{xy}(-2,0)=0$，$C=f''_{yy}(-2,0)=\dfrac{1}{(-2+1)^2}=1$

从而 $B^2-AC=0-3\times1=-3<0$，且 $A>0$

从而 $f(x,y)$ 在 $(-2,0)$ 处取极小值

$$f(-2,0)=2\ln|-2+1|+\frac{(-2)^2+0}{2(-2+1)^2}=2\ln1+\frac{4}{2}=2$$

综上，函数 $f(x,y)$ 的极小值 $f(-2,0)=2$，$f(-\frac{1}{2},0)=\frac{1}{2}-2\ln2$

11、由于区域D关于y轴对称；

且 $I_1=\iint\limits_D (x+y+1)^2\,dxdy=\iint\limits_D (x^2+y^2+1+2x+2y+2xy)\,dxdy$

则 $\iint\limits_D 2x\,dxdy=\iint\limits_D 2xy\,dxdy=0$ [x的奇函数]

由 $x^2+y^2\le 2y$，利用极坐标变换有 $r^2\le 2r\sin\theta$.

即 $r\le 2\sin\theta$ 又 $\sin\theta\ge 0$，有 $0\le\theta\le\pi$.

从而有 $I_1=\iint\limits_D (x^2+y^2+1+2y)\,dxdy$

$$=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}(r^2+1+2r\sin\theta)\,r\,dr$$

$$=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}(r^3+r+2\sin\theta\cdot r^2)\,dr$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{4}r^4+\frac{1}{2}r^2+\frac{2}{3}\sin\theta\, r^3\Big|_0^{2\sin\theta}\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{4}\cdot 2^4\sin^4\theta+2\sin^2\theta+\frac{2}{3}\cdot 2^3\sin^4\theta\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\frac{28}{3}\sin^4\theta+2\sin^2\theta\right)d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{28}{3}\sin^4\theta+2\sin^2\theta\right)d\theta$$

$$=2\cdot\left(\frac{28}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=2\cdot\left(\frac{7}{4}\pi+\frac{1}{2}\pi\right)=\frac{9\pi}{2}$$

12.(1)由题,物体的密度函数 $\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

利用球坐标变换,则 $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\tan\alpha}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}$ 变为

$$\begin{cases}\frac{r\sin\varphi}{\tan\alpha}\le r\cos\varphi\\ r\cos\varphi\le\sqrt{4-r^2\sin^2\varphi}\end{cases}$$ 则有 $$\begin{cases}\tan\varphi\le\tan\alpha\\ r^2\le 4\\ \cos\varphi\ge 0\end{cases}$$

因此有 $\begin{cases}0\le r\le 2\\ 0\le\varphi\le\alpha\end{cases}$, 又 $0\le\theta\le 2\pi$

从而 $M=\iiint\limits_V\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\alpha}d\varphi\int_0^2 r\cdot r^2\sin\varphi\,dr$

$$=2\pi\int_0^{\alpha}\sin\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^2 r^3\,dr$$
$$=2\pi\,(-\cos\varphi)\Big|_0^{\alpha}\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^2$$
$$=2\pi\cdot[-\cos\alpha-(-1)]\cdot\frac{1}{4}\cdot 2^4=8\pi(1-\cos\alpha)$$

(2) 设物体重心为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$

由对称性则 $\bar{x}=\bar{y}=0$

又 $\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\alpha}d\varphi\int_0^2 r\cos\varphi\cdot r\cdot r^2\sin\varphi\,dr$

$$=2\pi\cdot\int_0^{\alpha}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^2 r^4\,dr$$
$$=2\pi\int_0^{\alpha}\sin\varphi\,d\sin\varphi\cdot\frac{1}{5}r^5\Big|_0^2$$
$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\alpha}\cdot\frac{1}{5}(2^5-0)=\frac{64}{5}\pi\cdot\frac{1}{2}(\sin^2\alpha-0)=\frac{32\pi}{5}\sin^2\alpha$$

从而 $\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{M}=\dfrac{\frac{32\pi}{5}\sin^2\alpha}{8\pi(1-\cos\alpha)}=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}$

$$=\frac{4}{5}\,\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{4}{5}(1+\cos\alpha)$$

当重心位于$(0,0,1)$时则 $\bar{z}=1$

从而 $\frac{4}{5}(1+\cos\alpha)=1$, 解得 $\cos\alpha=\frac{1}{4}$

因此 $\alpha=\arccos\frac{1}{4}$ 时 物体重心为$(0,0,1)$

13、由 $y=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ 可得 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

则 L 的参数方程为 $\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$

且由 $A(-2,0)$ 到 $B(2,0)$ 则 θ 从 π 取到 0

因此 $I_2=\int_L (x^2-y^2)dx+(x+y)dy$

$$=\int_{\pi}^{0}(4\cos^2\theta-\sin^2\theta)\,d2\cos\theta+(2\cos\theta+\sin\theta)\,d\sin\theta$$

$$=\int_{\pi}^{0}2[4\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)]\,d\cos\theta-\int_0^{\pi}(2\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta)d\theta$$

$$=\int_{\pi}^{0}(10\cos^2\theta-2)\,d\cos\theta-\int_0^{\pi}(1+\cos2\theta+\tfrac{1}{2}\sin2\theta)d\theta$$

$$=\left(\tfrac{10}{3}\cos^3\theta-2\cos\theta\right)\Big|_{\pi}^{0}-\left(\theta+\tfrac{1}{2}\sin2\theta-\tfrac{1}{4}\cos2\theta\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\left(\tfrac{10}{3}-2\right)-\left(-\tfrac{10}{3}+2\right)-\left[\left(\pi+0-\tfrac{1}{4}\right)-\left(0+0-\tfrac{1}{4}\right)\right]$$

$$=\tfrac{4}{3}-\left(-\tfrac{4}{3}\right)-\pi=\tfrac{8}{3}-\pi$$

14. $z=2$ 代入 $x^2+y^2+z^2=4z$ 有 $x^2+y^2+4=8$，即 $x^2+y^2=4$

补充曲面 S_0: $x^2+y^2\le 4$, $z=2$，取上侧

因此 S_0 与 S 构成封闭曲面，设所围区域为 V

则 V: $x^2+y^2+z^2\le 4z$, $z\le 2$

即 V: $x^2+y^2+(z-2)^2\le 4$, $z\le 2$，为一个半球.

又 $\iint\limits_{S_0} x^2y\,dydz-xy^2dzdx+3z\,dxdy=\iint\limits_{S_0} 6\,dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4} 6\,dxdy$

$=6\cdot 4\pi=24\pi$

由高斯公式，$\oiint\limits_{S+S_0} x^2y\,dydz-xy^2dzdx+3z\,dxdy$

$=\iiint\limits_V (2xy-2xy+3)\,dxdydz=3\iiint\limits_V 1\,dxdydz$

$=3\times\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3\cdot\frac{1}{2}=16\pi$

$=I_3+\iint\limits_{S_0} x^2y\,dydz-xy^2dzdx+3z\,dxdy$

则 $I_3=\iint\limits_S x^2y\,dydz-xy^2dzdx+3z\,dxdy=16\pi-24\pi=-8\pi$

15.(1) 当级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛时

因为$a_n>0$ 且$\{a_n\}$单调递减

则 $a_1 \geq \frac{1}{2}a_1$，$a_2 \geq a_2$，$a_3+a_4 \geq 2a_4$，$a_5+a_6+a_7+a_8 \geq 4a_8$

…… 即 $\sum_{m=2^{k-1}+1}^{2^k} a_m \geq 2^{k-1}a_{2^k}$，此时 $k\in N^+$

因此 $\sum_{k=0}^{n} 2^{k-1}a_{2^k} = \frac{1}{2}a_1 + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}a_{2^k}$

$\leq a_1 + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}a_{2^k} = a_1 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=2^{k-1}+1}^{2^k} a_m$

$= a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k$

因为级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛，则$\exists M>0$，

对任意$n\in N_+$ 有 $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq M$ 成立

则 $\sum_{k=0}^{n} 2^{k-1}a_{2^k} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq M$.

从而有 $\sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k} \leq 2M$ 对任意$n\in N_+$成立

即级数部分和数列有界

因此级数 $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$ 收敛

当级数 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$ 收敛时.

由于数列 $\{a_n\}$ 单调递减，且 $a_n > 0$

有 $a_1 \geq a_1$，$2a_2 \geq a_2 + a_3$，$4a_4 \geq a_4 + a_5 + a_6 + a_7$，

$\cdots\ 2^m a_{2^m} \geq \sum\limits_{i=2^m}^{2^{m+1}-1} a_i$，$m \in N$

因此 $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k} \geq \sum\limits_{k=0}^{n} \sum\limits_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} a_i$

$$= \sum_{i=1}^{2^{n+1}-1} a_i$$

又因为 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$ 收敛，则 $\exists M > 0$，对 $\forall n \in N_+$ 有

$\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k} \leq M$ 成立

从而 $\sum\limits_{i=1}^{2^{n+1}-1} a_i \leq \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k} \leq M$

又因为 $2^{n+1} - 1 \geq n$ 对 $\forall n \in N_+$ 均成立

则 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \leq \sum\limits_{i=1}^{2^{n+1}-1} a_i \leq M$，即级数部分和数列有界

从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

综上，有级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛当且仅当级数 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$ 收敛.

(2) 此时 $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{2^{k+1}a_{2^{k+1}}}{2^k a_{2^k}} \xlongequal{n=2^k} \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2a_{2n}}{a_n}=2\rho$

由比值判别法，则 $2\rho<1$ 时级数 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}2^k a_{2^k}$ 收敛

$2\rho>1$ 时级数 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}2^k a_{2^k}$ 发散

再由(1)的结论，则有

$\rho<\frac{1}{2}$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛，$\rho>\frac{1}{2}$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散