微积分习题课讲义

目 录

第 1 章　部分预备知识回顾

1.1　常用的三角公式

(1) 和差化积公式

$$\begin{aligned}
&\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}\\
&\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\\
&\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}\\
&\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}$$

证明. 注意到 $\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}$,$\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}$. □

(2) 积化和差公式

$$\begin{aligned}
&\sin\alpha\cos\beta=\tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]\\
&\cos\alpha\sin\beta=\tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]\\
&\cos\alpha\cos\beta=\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\\
&\sin\alpha\sin\beta=-\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]
\end{aligned}$$

这可以看成和差化积公式的逆.

(3) 一些常用的三角恒等变换（见课本第 18 页）. 这些公式在后续的学习中非常重要, 尤其是常用于做等价替换, 因此需要大家熟练掌握. 此处补充一些内容：

$$\sec x=\frac{1}{\cos x},\csc x=\frac{1}{\sin x},\cot x=\frac{1}{\tan x}$$

$$\sin(\pi(x+n))=(-1)^n\sin(\pi x),\cos(\pi(x+n))=(-1)^n\cos(\pi x),n\in\mathbb{Z}$$

$$1+\tan^2 x=\sec^2 x,1+\cot^2 x=\csc^2 x$$

1.2 反三角函数

最重要的是掌握 arcsin, arccos, arctan 的性质, 尤其是学完导数和积分后要熟记这些函数的导数与不定积分.

反三角函数	三角函数	定义域	值域
$y = \arcsin(x)$	$x = \sin(y)$	$-1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos(x)$	$x = \cos(y)$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$
$y = \arctan(x)$	$x = \tan(y)$	$-\infty \le x + \infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
$y = \mathrm{arccot}(x)$	$x = \cot(y)$	$-\infty \le x + \infty$	$0 < y < \pi$

要特别注意的是, 对函数 arcsin, arccos, 它们都不是周期函数, 而函数 sin, cos 为周期函数. 因此不能简单地认为 $\arcsin(\sin x) = x, \arccos(\cos x) = x$ 等等.

例 1.1. (P24.36) 写出函数 $f(x) = \arcsin(\sin x)$ 和 $g(x) = \arccos(\cos x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的表达式.

解. 先看函数 $f(x) = \arcsin(\sin x)$. 由 $\sin x$ 为周期函数, 可知 $f(x)$ 也是一个周期函数. 因此可以先考虑找到函数 $f(x)$ 的一个周期以及它在一个周期上的表达式, 然后推广到实轴上. 因为 $\sin x$ 的周期是 2π, 因此可以验证 $f(x)$ 的周期也是 2π. 接着注意到 $\arcsin x$ 的值域为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 从这一区间入手, 首先可知

$$\arcsin(\sin x) = x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

再考虑区间 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. 注意到当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 时,$\pi - x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 正好位于我们刚刚讨论过的区间内. 因此在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 上

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$$

至此我们得到了 $f(x) = \arcsin(\sin x)$ 在一个周期 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 上的表达式. 再利用周期性可知, 对于 $x \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, 则 $x - 2k\pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,$f(x) = \arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(x - 2k\pi)) = x - 2k\pi$; 对于 $x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$, 则 $x - 2k\pi \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$,$y = \arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(x - 2k\pi)) = \pi - (x - 2k\pi) = (2k+1)\pi - x$. 综上可得

$$f(x) = \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x - 2k\pi, & x \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi], k \in \mathbb{Z} \\ (2k+1)\pi - x, & x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi], k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

同理可求出

$$g(x)=\arccos(\cos x)=\begin{cases}x-2k\pi, & x\in[2k\pi,(2k+1)\pi],k\in\mathbb{Z}\\(2k+2)\pi-x, & x\in((2k+1)\pi,(2k+2)\pi],k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

□

进一步思考：$y=\arctan(\tan(x))$ 在 $\mathbb{R}$ 上的表达式是怎样的？

1.3　曲线的极坐标与参数方程

在中学数学里, 确定平面上的一个点主要是靠水平方向与垂直方向两个坐标分量, 即我们熟悉的平面直角坐标 (x,y). 而极坐标则是另一种直观的方法, 它的描述很类似于方向角, 像“东北方向 10 米”就可以理解成一种极坐标的描述形式. 在一般的极坐标中, 确定某点位置的两个参数是距离原点的距离 r 以及对应方向向量与固定方向的夹角 θ.

直角坐标和极坐标之间的转换公式是非常常用的：

$$\begin{cases}x=rcos\theta\\y=rsin\theta\end{cases}$$

曲线的参数方程是指曲线上任何一点的位置都可以由一个参数来确定. 比如曲线是由一点随时间 t 运动生成的, 那么这条曲线就可以以 t 为参数而确定. 这时候曲线方程中的每个坐标分量都是一个关于 t 的函数：

$$x=f(t),y=g(t),t_1\le t\le t_2$$

极坐标和参数方程的优势在于, 它们可以用来简单地表示一些非线性的曲线.

例 1.2. (P25.50) 设曲线 $r=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta},p>0$, 验证
(1)$e=1$ 时为抛物线;
(2)$0<e<1$ 时为椭圆;
(3)$e>1$ 时为双曲线.

解. 将极坐标方程进行转化, 可得 $r-er\cos\theta=ep$. 转化成直角坐标则有 $\sqrt{x^2+y^2}=e(x+p)$. 且此时有 $x+p>0$, 即所有点均在直线 $x=-p$ 右侧. 而 $\sqrt{x^2+y^2}$ 可以看成到直角坐标系中原点的距离, $x+p$ 可以看成是直角坐标系中到直线 $x=-p$ 的距离, 且二者的距离之比是固定值 e. 因此此时可以将点 $(0,0)$ 看成焦点, 直线 $x=-p$ 看成准线.

下面利用曲线在直角坐标系中的标准方程来验证曲线类型. 方程两边平方则有

$$x^2+y^2=e^2(x+p)^2=e^2x^2+2e^2px+e^2p^2$$

(1) 当 $e=1$ 时, 方程变为 $y^2=2px+p^2$, 对应抛物线方程. 则曲线为抛物线.
(2) 当 $0<e<1$ 时, 方程变为 $(1-e^2)\,x^2-2e^2px+y^2=e^2p^2$, 即

$$\left(1-e^2\right)\left(x-\frac{pe^2}{1-e^2}\right)^2+y^2=e^2p^2+\frac{p^2e^4}{1-e^2}=\frac{e^2p^2}{1-e^2}$$

是一个椭圆平移后的方程 $(1-e^2>0)$, 则曲线为椭圆.
(3) 当 $e>1$ 时, 方程变为 $y^2-(e^2-1)\,x^2-2e^2px=e^2p^2$, 即

$$y^2-\left(e^2-1\right)\left(x+\frac{e^2p}{e^2-1}\right)^2=e^2p^2-\frac{p^2e^4}{e^2-1}=-\frac{e^2p^2}{e^2-1},$$

是双曲线平移后的方程 $(e^2-1>0)$, 则曲线为双曲线. □

第 2 章　数列极限

2.1　数列极限的定义

我们在微积分课程中讨论的一般都是实数域中的数列.

极限是微积分的基础, 深刻理解极限的概念是非常必要的. 在学习极限的过程中, 我们先从较为特殊的数列极限开始, 再进一步学习函数的极限. 历史上对极限的定义也存在很多的版本, 但最后数学家们公认的叙述最严谨、最恰当的就是我们现在学习的“$\varepsilon - N$”语言.

定义 2.1. 设 $\{a_n\}$ 为一数列,a 为常数, 若 $\forall\varepsilon > 0$,$\exists N \in \mathbb{Z}_+$, 使得当 $n > N$ 时就有 $|a_n - a| < \varepsilon$, 则称 a 为 $\{a_n\}$ 的**极限**.

这个定义说的是这样一件事：不管有一个怎样小的 ε, 都能找到一个足够大的 N, 使得所有那些 $a_n(n > N)$ 与 a 的距离都比 ε 小. 就像两个人玩卡牌游戏, 每当玩家 1 出一张面值为 ε 的牌, 玩家 2 总能出一张面值为 N 的牌来战胜他. 这种玩家 1 永远赢不了的情况就对应“$\{a_n\}$ 的极限为 a”的表述.

要注意的是, 这一定义中的表述是非常严谨的, 如果叙述的字眼或顺序出现错误, 那么表达的意思就会出现巨大的偏差.

例 2.1. 下列表述与数列极限的定义是不等价的（为什么?）

(1) 对无穷多个 $\varepsilon > 0$,$\exists N \in \mathbb{Z}_+$, 使得当 $n > N$ 时就有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

(2) $\forall\varepsilon > 0$,$\exists N \in \mathbb{Z}_+$, 使得有无穷多个 $n > N$ 满足 $|a_n - a| < \varepsilon$.

(3) $\forall\varepsilon > 0$,$\exists N \in \mathbb{Z}_+$, 使 $|a_n - a| < \varepsilon$.

(4) $\exists N \in \mathbb{Z}_+$, 使当 $n > N$ 时,$\forall\varepsilon > 0$ 成立 $|a_n - a| < \varepsilon$.

对于 (1), 要注意到“无穷多个”和“$\forall$”并不是同一个意思. 因为即使是取无穷多个, 也不能保证能覆盖到所有正实数的情形, 取 $a_n = 0, a = 1, \varepsilon = 2, 3, 4, \cdots$ 即得一反例；对于 (2), 原定义的意思是要对所有的 $n > N$ 都满足 $|a_n - a| < \varepsilon$, 而不能仅说是无穷多个, 取 $a_n = (-1)^n, a = 1$, 则所有为偶数的 n 满足表述, 但显然 a_n 发散；对于 (3), 这个表述中“$\exists N \in \mathbb{Z}_+$”没起到任何作用, 该表述的含义是 a_n 为常数列；对于 (4), 这句话也先说了 $\exists N \in \mathbb{Z}_+$, 相当于把 N 固定死了, 但是数列极限的定义中 N 并不是绝对固定的, 而是依赖于 ε、随着 ε 的选取来做出相应调整的.(4) 实际上等价于数列 a_n 当 $n > N$ 时为常数列 a.

“$\varepsilon-N$”定义必须先有 $\varepsilon>0$, 后有 $\exists N\in\mathbb{Z}_+$（因为 N 实际上是依赖于 ε 的）, 然后说明了 ε 和 N 的作用, 即当 $n>N$ 时就有 $|a_n-a|<\varepsilon$. 依照这样的顺序, 才是完整严谨的数列极限的定义.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 则称 a_n 为无穷小数列；若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, 则称 a_n 为无穷大数列. 此外还应当注意,“数列极限存在”这一表述指的是数列收敛于某个特定的实常数, 而不能是趋于无穷. 换言之, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ 可以习惯性地说这个数列的极限为无穷大, 但并不能认为这个数列的极限存在, 相反按照无穷大数列的定义这个数列是发散的.

注 2.1. 数列极限是我们在微积分课程中接触的第一个重要定义. 从这个定义中我们看到, 数学中的定义定理等的描述都是十分严谨的, 各种前提条件都不可随意更改替换. 因此在微积分课程的学习中, 同学们要多研读教材, 搞清楚各种定义定理的表述以及前提条件, 只有搞清楚这些方面的问题才能真正把握微积分的精髓, 在之后的学习中才能避免因为概念模糊不清而出现的理解混乱、题目乱做等问题.

思考：$\{a_n\}$ 不收敛于 a 用 $\varepsilon-N$ 语言如何描述？

再看几个例子来继续加深对数列极限概念的理解. 我们将看到, 在使用数列极限的定义证明某个具体的数列极限时, 最关键的一步就是找到合适的 N. 一般来说, 对这类问题我们要先对数列通项表达式进行变形放缩, 以此确定一个依赖于 ε 的 N, 然后再按照数列的 $\varepsilon-N$ 定义叙述我们最终得到的结论.

例 2.2. (P42.6) 用 $\varepsilon-N$ 语言的数列极限定义证明：
(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0(a>0)$.
(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{5+3n}=\dfrac{1}{3}$.
(3) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{99\cdots9}_{n\text{ 个}}=1$.

解. (1) 分析：当 n 足够大时, 因为 a 是个常数, 一定会出现某个 $k\in\mathbb{Z}_+$ 使当 $n>k$ 时有 $n>a$. 以 k 为分界线把原来的 $\dfrac{a^n}{n!}$ 拆成两部分之积 $\dfrac{a\cdot a\cdots a}{1\cdot2\cdots k}\cdot\dfrac{a\cdot a\cdots a}{(k+1)(k+2)\cdot n}$, 再分别处理放缩得到要证的结论.

证明: 记 $k=[a]+1$,“[ ]”表示取整函数. 则当 $n>k$ 时 $\dfrac{a}{n}<1$. 因此

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|=\frac{a\cdot a\cdots a}{1\cdot2\cdots k}\cdot\frac{a}{k+1}\cdots\frac{a}{n-1}\cdot\frac{a}{n}\le M\cdot\frac{a}{n}$$

这里 $M=\dfrac{a\cdot a\cdots a}{1\cdot 2\cdots k}$ 是常数. 因此 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\max\left\{k,[\frac{Ma}{\varepsilon}]+1\right\}$, 当 $n>N$ 时 $\left|\dfrac{a^n}{n!}\right|\le M\dfrac{a}{n}<\varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

(2)$\left|\dfrac{n}{5+3n}-\dfrac{1}{3}\right|=\left|\dfrac{3n-(5+3n)}{3(5+3n)}\right|=\dfrac{5}{3(5+3n)}<\dfrac{5}{9n}<\dfrac{1}{n}$. 因此对于 $\forall\varepsilon>0$, 取正整数 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n\ge N$ 时, $\left|\dfrac{n}{5+3n}-\dfrac{1}{3}\right|<\dfrac{1}{n}\le\dfrac{1}{N}<\varepsilon$, 因此有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{5+3n}=\dfrac{1}{3}$.

(3) 由于 $|0.\underbrace{99\cdots9}_{n\text{ 个}}-1|=10^{-n}=\dfrac{1}{10^n}<\dfrac{1}{n}$, 对于 $\forall\varepsilon>0$, 取正整数 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n\ge N$ 时, $|0.\underbrace{99\cdots9}_{n\uparrow}-1|=\dfrac{1}{10^n}<\dfrac{1}{n}\le\dfrac{1}{N}<\varepsilon$. 因此有 $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{99\cdots9}_{n\text{ 个}}=1$. □

注 2.2. 有时候在选取 N 时可能会碰见 N 未必为正整数的情况. 以第 (3) 题为例, 若直接从 $\frac{1}{10^n}<\varepsilon$ 推出 $n>-lg\varepsilon$, 则会发现此时 $-lg\varepsilon$ 未必是正数. 实际上当 $\varepsilon>1$ 时它是负数, 而当 $0<\varepsilon<1$ 时则是正数. 在这种情况下, 我们可以限定 $\varepsilon\in(0,1)$(注意到这样的限定并不会影响我们的结论, 因为我们真正在意的就是这些“小”的 ε), 那么此时的 $[-lg\varepsilon]+1$ 就可以保证为一个正整数, 因而就可以取 $N=[-lg\varepsilon]+1$ 了. 所以总结上述分析, 我们又有了如下的一种证明过程:“对任意 $\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $N=[-lg\varepsilon]+1$, 当 $n>N$ 时 $|0.\underbrace{99\cdots9}_{n\uparrow}-1|=\frac{1}{10^n}\le\dfrac{1}{N}<\varepsilon$”.

注 2.3. 对于含有阶乘 $n!$ 的通项, 常常要把阶乘展开写出来进行分析, 这样便于寻找解题思路. 如这里 (1) 题中把 $n!$ 拆成 $1\cdot2\cdots k$ 和 $(k+1)(k+2)\cdot n$, 进而做放缩处理.

一般地, 我们有如下的阶的比较性质:

$$\ln(n)<<n^k<<a^n<<n!<<n^n$$

其中 $a>1,k\in\mathbb{Z}_+.a_n<<b_n$ 表示成立 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$.

例 2.3. (P43.13) 设 $\{a_n\}$ 为非负数列, 且 $a_n\to a>0$, 证明 $\sqrt{a_n}\to\sqrt{a}$.

解. 分析: 此处给出了一个已知数列的极限, 去证明另一个和已知数列关系密切的数列的极限. 因此想到把未知数列往已知数列的形式上靠.

证明: 由 $a_n \to a$ 可知, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$, 使得 $n > N$ 时有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立. 因此当 $n > N$ 时有

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| = \left|\frac{a_n - a}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}\right| < \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}}$$

令 $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}}$, 由 ε 的任意性, 则 ε_1 也有任意性, 此时对 $\forall \varepsilon_1 > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时 $\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| < \varepsilon_1$ 成立, 则有 $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$ 成立. □

注 2.4. 注意, 本题实际上要证明 $\left\{\sqrt{a_n}\right\}$ 收敛, 因此在证明此结论前是不知道 $\left\{\sqrt{a_n}\right\}$ 是否收敛的, 也因此不能直接使用极限四则运算法则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{a_n})^2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n}$$

上述做法是错误的, 因为不知道 $\left\{\sqrt{a_n}\right\}$ 是否收敛时不能用四则运算法则.

注 2.5. 从以上这些例子可以看到, 在使用数列的 $\varepsilon - N$ 定义证明数列极限问题时, 往往伴随着一些不等式的放缩. 因此, 根据数列通项的特点寻找合适的放缩方法很重要, 这需要同学们积累一定的放缩经验.

2.2 收敛数列的性质

收敛数列具有极限唯一性、有界性、保号性、保不等式性、夹逼定理等性质, 且有四则运算法则（注意只有收敛数列能进行四则运算, 发散数列不能）. 其中四则运算法则和夹逼定理可以帮助我们计算很多数列的极限.

注 2.6. 两个发散数列的和、差、积、商可能发散, 也可能收敛. 例如考虑 $a_n = (-1)^n, b_n = 2(-1)^n, c_n = -(-1)^n + 1, d_n = 2(-1)^n + 1$, 这四个数列都发散, 但是数列

$$\{a_n + b_n\}, \{a_n - b_n\}, \{a_n c_n\}, \left\{\frac{b_n}{d_n}\right\}$$

都发散, 而

$$\{a_n + c_n\}, \{b_n - d_n\}, \{a_n b_n\}, \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$$

都收敛.

例 2.4. (P43.16) 利用极限的运算法则计算下列极限:
(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{(n+a)(n+b)} - n), a, b \in \mathbb{R}$
(3) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \sqrt[5]{1 - \frac{1}{n}}\right)$

解. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{(-2)^n}{3^{n+1}}+\frac{3^n}{3^{n+1}}}{\frac{(-2)^{n+1}}{3^{n+1}}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3}}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}=\frac{0+\frac{1}{3}}{0+1}=\frac{1}{3}$.

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{(n+a)(n+b)}-n)&=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{(n+a)(n+b)}-n)(\sqrt{(n+a)(n+b)}+n)}{\sqrt{(n+a)(n+b)}+n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+b)n+ab}{\sqrt{(n+a)(n+b)}+n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{a+b+\frac{ab}{n}}{1+\sqrt{1+\frac{a+b}{n}+\frac{ab}{n^2}}}\\&=\frac{a+b}{2}.\end{aligned}$$

(3) 记 $a=1-\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}}$, 则有 $(1-a)^5-1=-\frac{1}{n}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a=0$. 由因式分解 $x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$, 可得 $-\frac{1}{n}=-a[(1-a)^4+(1-a)^3+(1-a)^2+(1-a)+1]$. 则

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}na=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1-a)^4+(1-a)^3+(1-a)^2+(1-a)+1}=\frac{1}{5}$$

□

例 2.5. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a\in\mathbb{R}$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=0$.

解. 分析: 条件是一个已知的收敛数列, 所以考虑利用这个已知数列与待求数列的关系, 利用收敛数列的四则运算进行证明.

证明: 因为

$$\frac{a_n}{n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\frac{n-1}{n}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=a-1\cdot a=0$$

□

例 2.6. 设有 m 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}$.

解. 设 $A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$, 则易见有

$$A^n\le a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n\le mA^n$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{mA^n}=A$, 由夹逼定理知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=A$$

□

注 2.7. 题目里面的这些正数都是任意的, 所以这个极限的结果依赖于这些正数的选取, 那么答案很可能就是这堆数的特性的某个值（平均值，最大值，最小值等）. 首先可以去估计根式里面的表达式的范围, 进而对这个范围的上下界先求极限, 如果两者极限相同, 则可以用夹逼定理. 若不同, 则可以进一步考虑缩小估计的范围区间. 这就是使用夹逼定理的一般流程. 当然, 如果不管怎么放缩都无法成功夹逼, 那可能就要寻找其他方法了.

例 2.7. (P43.15) 利用夹逼定理计算下列极限:
(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right]$;
(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n+\cdots+9^n}$;

解. 分析: 根据前面的注解, 我们已经知道利用夹逼定理求极限的一般流程是先适当放缩原式寻找它的一个上界和下界, 使得上界和下界有相同的极限, 从而夹逼得到原式的极限. 这里最难的就是如何把握好放缩的度, 放缩得太大或太小都无法顺利地使用夹逼定理, 因此十分考验大家对各种类型的式子的放缩技巧的熟悉程度.
解:(1) 由于

$$\frac{n+1}{4n^2}=\frac{n+1}{(2n)^2}<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}<\frac{n+1}{n^2}$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n^2}=0$, 由夹逼定理则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right]=0$.
(2) 这就是上一个例题的一个特殊情况, 极限为 9. □

例 2.8. (P43.20) (1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n^2-n+1}{2n^3+3n^2+2}$;
(2) 研究极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_0+a_1n+\cdots+a_pn^p}{b_0+b_1n+\cdots+b_qn^q}$ 的敛散性, 其中 p,q 为正整数, $a_p\neq 0,b_q\neq 0$.

解. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n^2-n+1}{2n^3+3n^2+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}{2+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^3}}=\frac{3+0-0+0}{2+0+0}=\frac{3}{2}$.
(2) 从上一小题可以发现, 这一极限实际上只和分子分母中的两个多项式的次数有关. 事实上

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0+a_1n+\cdots+a_pn^p}{b_0+b_1n+\cdots+b_qn^q}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^p\left[a_0\left(\frac{1}{n^p}\right)+a_1\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right)+\cdots+a_p\right]}{n^q\left[b_0\left(\frac{1}{n^q}\right)+b_1\left(\frac{1}{n^{q-1}}\right)+\cdots+b_q\right]}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_p}{b_q}n^{p-q}$$

这时要考虑 p 和 q 的大小关系, 因为此时我们只需考察最高次项.
1. 当 $p=q$ 时, 原极限 $=\dfrac{a_p}{b_q}\lim\limits_{n\to\infty}n^{p-p}=\dfrac{a_p}{b_q}$, 此时收敛;

2. 当 $p > q$ 时, 原极限转化为 $\dfrac{a_p}{b_q}\lim\limits_{n\to\infty} n^{p-q}$, 此时可知这个极限并不存在, 即发散;

3. 当 $p < q$ 时, 原极限 $= \dfrac{a_p}{b_q}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{q-p}} = 0$, 此时收敛.

综上, 当 $p > q$ 时原极限发散, 当 $p \le q$ 时原极限收敛. □

2.3 与数列极限存在性有关的若干定理

课本上主要介绍了下述定理：

1. 单调有界定理：单调有界数列必有极限.
2. 波尔查诺-魏尔斯特拉斯定理：有界数列必有收敛子列.
3. 柯西准则：数列 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当 $\{a_n\}$ 为柯西列, 即 $\forall\varepsilon > 0,\exists N \in \mathbb{Z}_+$, 当 $n, m > N$ 时有 $|a_n - a_m| < \varepsilon$.
4. 数列 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当它的任一子列收敛且收敛于相同的极限. 这一定理常用于证明某个数列的极限不存在.

例 2.9. (P45.38) 证明数列 $\{\sin n\}$ 发散.

解. (法 1) 利用数列的子列证明. 假设 $\{\sin n\}$ 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n = A$. 则 $\forall k \in \mathbb{N}_+$, 存在正整数 $n_k \in \left(2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{3\pi}{4}\right)$, 这是由于实轴上长度大于 1 的任一区间内至少存在一个整数. 此时有 $\sin n_k > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 且 $\lim\limits_{n_k\to\infty}\sin n_k = A \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$.
同理 $\forall m \in \mathbb{N}_+$, 存在正整数 $n_m \in \left(2m\pi - \frac{3\pi}{4}, 2m\pi - \frac{\pi}{4}\right)$, 此时有 $\sin n_m < -\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又数列 $\{\sin n_m\}$ 为数列 $\{\sin n\}$ 的子列, 则数列 $\{\sin n_m\}$ 也收敛, 且 $\lim\limits_{m_m\to\infty}\sin n_m = B \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$. 此时显然有 $A \ne B$, 而数列 $\{\sin n\}$ 收敛时应有其所有子列的极限相同, 矛盾. 从而 $\{\sin n\}$ 发散.
(法 2) 利用柯西收敛准则. 假设 $\{\sin n\}$ 收敛, 取 $\varepsilon = 1, \forall N \in \mathbb{N}_+$, 存在 $m, n > N$ 且 $m \in \left(2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{3\pi}{4}\right), n \in \left(2k\pi - \frac{3\pi}{4}, 2k\pi - \frac{\pi}{4}\right)$, 这里 $k \in \mathbb{Z}_+$. 则此时应有 $\sin m > \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin n < -\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故有 $|\sin m - \sin n| > \sqrt{2} > \varepsilon = 1$, 这与柯西准则矛盾. 故假设不成立, 即数列 $\{\sin n\}$ 发散. □

我们再来看一些与子数列有关的问题.

例 2.10. (P45.30) 设 $\{a_n\}$ 是单调增加数列, 证明: 如果存在 $\{a_n\}$ 的一个子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛于 a, 则 $\{a_n\}$ 也收敛于 a.

解. 分析: 注意到对任意的 n, 必存在 k 使得 $n_k \le n \le n_{k+1}$ 成立. 而此时的数列又是单调增加的, 对应就会有 $a_{n_k} \le a_n \le a_{n_{k+1}}$. 所以只要 $\{a_{n_k}\}$ 是收敛的, 就能通过这层关系推导出 $\{a_n\}$ 也收敛.

证明: 由于 $\{a_{n_k}\}$ 收敛于 a, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n_k \ge N$ 时有 $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ 成立. 也即此时有 $a - \varepsilon < a_{n_k} < a + \varepsilon$ 成立. 又因为对任意的 $n > N$, 必存在 $n_{k+1} \ge n \ge n_k \ge N$ 成立, 且 $\{a_n\}$ 单调增加, 此时有 $a + \varepsilon > a_{n_{k+1}} \ge a_n \ge a_{n_k} > a - \varepsilon$ 成立, 即 $n > N$ 时有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. □

本章的最后介绍了一种非常有用的用于判断数列敛散性的定理, 即柯西收敛准则. 柯西收敛准则的叙述与数列极限的定义一样, 都是用 $\varepsilon - N$ 语言来叙述的, 因此在使用这一准则的时候也要注意叙述的规范性. 除了课本上对柯西准则的描述外, 柯西准则还有另一种等价的叙述, 有时使用起来也很方便.

定理 2.1. (柯西准则的等价叙述) 数列 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, 对任意的正整数 p 都有 $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

直观上柯西收敛准则是说, 如果一个数列收敛, 那么当下标 n 足够大以后, 数列中的任意两项的距离都能变得足够小, 因而就全部聚成了一团, 数列就会收敛了. 反过来也可以通过数列在 n 足够大以后的这种特性判断数列收敛. 在具体的应用中, 柯西收敛准则经常要结合绝对值三角不等式做放缩, 这也是选取 ε, N 的一般方法.

例 2.11. (P45.37) 证明: 对数列 $\{a_n\}$, 若存在常数 $c > 0$, 使对任何 n, 有 $|a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \le c$, 则 $\{a_n\}$ 收敛.

解. 分析: 对于这种给出数列的相邻两项的差的问题 (如给出了 $|a_{n+1} - a_n|$ 的某种性质等等), 一般来说可以考虑使用柯西收敛准则. 因为对于柯西收敛准则中的项 $|a_{n+p} - a_n|$, 用三角不等式很容易得到

$$|a_{n+p} - a_n| \le |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + |a_{n+p-1} - a_{n+p-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n|$$

不等式右边的每一项都都形如 $|a_{n+1} - a_n|$, 即都包含的数列相邻两项的差, 就可以用上题设条件了.

证明: 记 $b_n = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_{n+1} - a_n|, n \in \mathbb{N}_+$. 由于 $b_{n+1} - b_n = |a_{n+2} - a_{n+1}| \ge 0$ 成立, 即 $\{b_n\}$ 单调增加; 又 $b_n \le c$, 则数列 $\{b_n\}$ 单调增加有

上界, 从而 $\{b_n\}$ 收敛. 由柯西准则, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 对任意正整数 $m>n\geq N$ 有

$$\begin{aligned}|a_{m+1}-a_{n+1}| &= |(a_{m+1}-a_m)+(a_m-a_{m-1})+\cdots+(a_{n+2}-a_{n+1})| \\ &\leq |a_{m+1}-a_m|+|a_m-a_{m-1}|+\cdots+|a_{n+2}-a_{n+1}| \\ &= b_m-b_n=|b_m-b_n|<\varepsilon\end{aligned}$$

因此 $\{a_n\}$ 是柯西列, 从而收敛. □

例 2.12. (压缩映像原理) 对于数列 $\{a_n\}$, 若存在一个常数 $r\in(0,1)$ 使得对任意正整数 n 都成立

$$|a_{n+1}-a_n|\leq r|a_n-a_{n-1}|$$

则数列 $\{a_n\}$ 收敛.

解. 同样地, 根据题目条件可以考虑使用柯西准则. 注意到对任意 n 有

$$|a_{n+1}-a_n|\leq r|a_n-a_{n-1}|\leq\cdots\leq r^{n-1}|a_2-a_1|\leq r^n|a_1-a_0|$$

因此对任意的正整数 n,p, 根据题目条件有

$$\begin{aligned}|a_{n+p}-a_n| &\leq |a_{n+p}-a_{n+p-1}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n| \\ &\leq (r^{n+p-1}+\cdots+r^{n+1}+r^n)|x_1-x_0| \\ &= |x_1-x_0|\frac{r^n-r^{n+p}}{1-r}\leq |x_1-x_0|\frac{r^n}{1-r}\end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_1-x_0|\frac{r^n}{1-r}=0$, 因此 $\forall\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 时 $||x_1-x_0|\frac{r^n}{1-r}|<\varepsilon$. 因此也有 $\forall\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 时对任意的正整数 p 成立

$$|a_{n+p}-a_n|\leq |x_1-x_0|\frac{r^n}{1-r}<\varepsilon$$

因此由柯西准则知 $\{a_n\}$ 收敛.

□

注 2.8. 本题的结论是著名的压缩映像原理的一种特殊情形, 按照这一原理的证明过程, 实际上我们可以得到一种用柯西准则证明数列收敛的新方法: 如果给定的数列满足压缩映射原理的条件 (即可以找到这样一个常数 r), 那么就可以按照证明这个定理的相同思路来用柯西准则证明所给数列收敛.

在应用中还会经常碰见一类数列, 即由递推公式给出的数列. 这种数列的通项公式一般很难求, 若要研究这些数列的敛散性与极限, 一般只能从判断敛散性的一般定理入手.

例 2.13. (与递推数列有关的问题)
(1) 设 $a_1=\sqrt{c}, a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}$, 证明 $\{a_n\}$ 收敛并求极限.
(2) 设 $x_1=1, x_2=\dfrac{1}{2}, x_{n+1}=\dfrac{1}{x_n+1}(n=1,2,\cdots)$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求极限.
(3) 设 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=q\sin x_n+a, n=0,1,2,\cdots$, a 和 q 为常数,$q\in(0,1)$. 证明对于任意 $x_0\in\mathbb{R}$,$\{x_n\}$ 都收敛.
(4) 课本 P39. 例 1.2.13.(此处省略)

解. 分析: 对于一个递推数列 $a_{n+1}=f(a_n)$(这里假设 f 是连续函数), 如果数列收敛:$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 那么在递推公式两边令 $n\to\infty$ 可以得到

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}f(a_n)\Longleftrightarrow a=f(a)$$

所以原数列如果收敛, 一定收敛到方程 $x=f(x)$ 的一个根. 因此常常可以先把这个根找出来, 然后以此为突破口来观察原数列的收敛情况. 当然要注意, 在证明数列收敛的时候还是要用基本的定理来证明, 不能一上来就说“假设数列收敛 $\cdots$”之类的语句.
解:(1) 先证明单调性. 首先 $a_2=\sqrt{c+\sqrt{c}}>\sqrt{c}=a_1$ 成立. 再假设对任意 $k\in\mathbb{N}_+, a_{k+1}>a_k$ 成立, 则有 $a_{k+2}=\sqrt{c+a_{k+1}}>\sqrt{c+a_k}=a_{k+1}$ 成立, 从而数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列.

再证明有界性. 同样可以用数学归纳法来证明. 令 $a=\sqrt{a+c}$, 则 $a^2-a-c=0$, 解得 $a=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$ 或 $a=\frac{1-\sqrt{1+4c}}{2}$(舍去). 由题意得 $a_1<a$. 现在假设 $a_k<a$ 成立, 则 $a_{k+1}=\sqrt{a_k+c}<\sqrt{a+c}=a$ 也成立. 因此恒有 $a_n<a=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$. 则数列 $\{a_n\}$ 单调递增有上界, 所以收敛.

令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$, 则有 $b=\sqrt{b+c}$, 解得 $b=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$ 或 $b=\frac{1-\sqrt{1+4c}}{2}$(由保号性舍去). 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.
(2) 易见 $0<x_n\le 1$. 考察 $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{1+x_n}-\frac{1}{1+x_{n-1}}=\frac{-(x_n-x_{n-1})}{(1+x_n)(1-x_{n-1})}$. 因 $x_2-x_1<0$, 则 $x_3-x_2>0$, 以此类推 $x_4-x_3>0,\cdots,x_{2k}-x_{2k-1}<0,x_{2k+1}-x_{2k}>0,\cdots$ 所以 $\{x_n\}$ 本身不单调.

设正数 a 满足 $\frac{1}{1+a}=a$, 若 $x_n<a$, 则 $x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}>\frac{1}{1+a}=a$: 若 $x_n>a$, 则 $x_{n+1}<a$. 又因为 $x_1>a, x_2<a$ (可估计 $a\approx 0.618$), 则 $a_{2k+1}>a, a_{2k}<a$. 因为

$$x_{n+2}-x_n=\frac{1-x_n-x_n^2}{2+x_n}=\frac{a^2+a-x_n-x_n^2}{2+x_n}=\frac{(1+a+x_n)(a-x_n)}{2+x_n}$$

所以 $x_n<a$,$x_{n+2}-x_n>0$; $x_n>a$ 时 $x_{n+2}-x_n<0$. 故 x_{2k} 递增且有上界 a, x_{2k-1} 递减且有下界 a, 所以存在 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=\alpha, \lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=\beta$.

对递推关系 $x_{n+1}=\frac{1}{x_n+1}$ 分别当 $n=2k, n=2k-1$ 取极限, 得 $\beta=\frac{1}{1+\alpha}, \alpha=\frac{1}{1+\beta}$, 因此有 $\alpha=\beta=a$, 所以 $\{x_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(3) 本题实际上可以按照前面证明压缩映像原理的过程来用柯西准则证明. 考察

$$|x_2-x_1|=q|\sin x_1-\sin x_0|=2q|\sin\frac{x_1-x_0}{2}||\cos\frac{x_1+x_0}{2}|\le q|x_1-x_0|$$

其中用到了和差化积公式与不等式 $|\sin x|\le|x|$ 和 $|\cos x|\le 1$. 同理可得 $|x_3-x_2|\le q|x_2-x_1|\le q^2|x_1-x_0|$. 以此类推有 $|x_{n+1}-x_n|\le q^n|x_1-x_0|$. 因此对任意 $n,p\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n|&\le|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\le(q^{n+p-1}+\cdots+q^n)|x_1-x_0|\\&=\frac{q^n(1-q^p)}{1-q}|x_1-x_0|\le\frac{q^n}{1-q}|x_1-x_0|\end{aligned}$$

显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{q^n}{1-q}|x_1-x_0|$ 存在, 因此 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$, 当 $n>N$ 时 $\frac{q^n}{1-q}|x_1-x_0|<\varepsilon$. 因此也有 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$, 当 $n,p>N$ 时

$$|x_{n+p}-x_n|\le\frac{q^n}{1-q}|x_1-x_0|<\varepsilon$$

由柯西准则知 $\{x_n\}$ 收敛. □

注 2.9. 对于递推数列求极限问题, 首先要证明极限存在, 然后再求极限. 或者直接求出通项公式后求极限（但大部分情况下通项公式很难求）. 证明递推数列极限存在的常用方法:

(1) 计算 $a_{n+1}-a_n$ 或 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 判断数列单调性, 如果单调, 再进一步判断有界, 由单调有界定理得到结论. 判断单调性也可以用构造对应函数的导数、数学归纳法等方法.

(2) 如果数列 $\{a_n\}$ 不单调 (比如它是隔项单调的), 也可以考虑先猜出它的极限 A, 然后去验证当 n 趋于无穷时 $|a_n-A|$ 趋于 0. 这种方法可以参考课本 P39. 例 1.2.13.

(3) 使用柯西准则, 即先看 $|a_{n+p}-a_n|$ 是否能够经过放缩得到一个容易判断敛散性的新的式子, 进而用柯西准则来得到结论. 此时常常要用到压缩映像原理的类似想法.

小结 2.1. 判断数列收敛主要有如下方法：

(1) 利用“$\varepsilon-N$”直接验证, 这一过程中常需要做一些放缩；

(2) 利用收敛数列的四则运算法则, 包括根式有理化及拆项法等转化为已知敛散性的数列来判断；

(3) 利用无穷小数列的性质, 如无穷小数列与有界数列的乘积仍是无穷小数列等；

(4) 利用收敛数列与其子列的关系, 如果已知子列的某些性质, 则可以考虑从子列下手;
(5) 利用夹逼定理;
(6) 对单调数列可以考虑用单调有界定理;
(7) 使用柯西收敛准则;
(8) 如果数列通项里出现了幂次, 考虑利用重要极限 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ (或者考虑把通项化为以 e 为底数的指数表达式).

小结 2.2. 判断数列发散主要有如下方法:
(1) 利用数列发散的定义;
(2) 若数列无界, 则该数列必发散;
(3) 若数列存在发散子列, 或者数列有两个子列收敛到不同的值, 则该数列发散;
(4) 利用柯西准则的否定形式;
(5) 反证法等其他方法.

第 3 章　函数的极限与连续性

3.1　函数的极限

定义 3.1. 设 $f : D \to \mathbb{R}$,D 是 $\mathbb{R}$ 的子集且包含 x_0 的某去心邻域. 若存在 $A \in \mathbb{R}$ 使得对任意 $\varepsilon > 0$,$\exists \delta > 0$, 在 D 内当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$. 则称 A 是 f 在 x_0 处的极限. 如果不存在满足要求的 A, 则称 f 在 x_0 处的极限不存在.

注意, 此时我们并不要求函数 f 在 x_0 处有定义. 即使 f 在 x_0 处有定义, 极限 A 也未必与 $f(x_0)$ 相等. 实际上当 $f(x_0)$ 与 A 相等时, 就得到了 f 在 x_0 处连续的定义.

与数列极限不同的是, 在研究函数极限时, 我们经常会研究函数的单侧极限. 这是由于函数可能只在某点 x_0 的一侧有定义, 或者我们需要通过研究函数在 x_0 两侧的状态来研究函数在这一点的性状.

定义 3.2. 设 $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}$
(1) 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $-\delta < x - x_0 < 0$, 即 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 f 在 x_0 处有左极限, A 是 f 在 x_0 处的左极限, 记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$;
(2) 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < x - x_0 < \delta$, 即 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 f 在 x_0 处有右极限, A 是 f 在 x_0 处的右极限, 记为 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.
$f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限有时也分别记为 $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ 或 $f_-(x_0)$,$f_+(x_0)$.

由函数极限的定义, 容易证明 f 在 x_0 处有极限当且仅当 f 在 x_0 处的左、右极限都存在并且相等, 即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$

对于函数, 我们还可以考虑当自变量 x 趋于无穷时的函数极限.

定义 3.3. 设 $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$.
(1) 若 $D \supset (a, +\infty)$,$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$, 当 $x > M$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 是 f 当 x 趋于 $+\infty$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$;
(2) 若 $D \supset (-\infty, a)$,$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$, 当 $x < -M$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A

是 f 当 x 趋于 $-\infty$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$;
(3) 若 $D\supset(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)(a>0), \forall\varepsilon>0, \exists M>0$, 当 $|x|>M$ 时 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 则称 A 是 f 当 x 趋于 ∞ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

同样地, 我们有

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A.$$

例 3.1. (P64.1) 用函数极限的定义证明下列极限:
(1)$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2$. (2)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=0$.

解. 分析: 函数极限和数列极限的定义证明法过程是差不多的, 但要注意的是函数往往存在着定义域的要求, 这使得在选取 δ 的时候要多考虑一层函数定义域的条件. 比如下面的第 (1) 题中, 为了使所取的邻域位于 $\sqrt{x}$ 的定义域内, 我们需要限制 $\delta<1$.
解:(1) 先限定 $0<|x-1|<1, 0<x<2, x\neq1$.(这里的限定是为了使 $\sqrt{x}$ 有意义). 则 $\forall\varepsilon>0$, 要使得

$$\left|\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}-2\right|=|\sqrt{x}+1-2|=|\sqrt{x}-1|=\left|\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\right|<|x-1|<\varepsilon$$

只要 $|x-1|<\varepsilon$ 即可, 因此 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\{1,\varepsilon\}$, 当 $0<|x-1|<\delta$ 时有 $\left|\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}-2\right|<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2$.
(2) 由于对任意 $x\in\mathbb{R}$ 有 $|\arctan x|\leq\frac{\pi}{2}$, 则 $\forall\varepsilon>0$, 要使得

$$\left|\frac{\arctan x}{x}-0\right|<\frac{\pi}{2}\cdot\left|\frac{1}{x}\right|=\frac{\pi}{2|x|}<\varepsilon$$

只要 $|x|>\frac{\pi}{2\varepsilon}$ 即可. 因此 $\forall\varepsilon>0$, 取 $M=\frac{\pi}{2\varepsilon}$, 当 $|x|>M$ 时有

$$\left|\frac{\arctan x}{x}-0\right|<\frac{\pi}{2|x|}<\frac{\pi}{2M}=\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=0$. □

注 3.1. 值得注意的是, 对于 $\arctan x$ 而言, $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 是不存在的. 这是由于若 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 存在, 则应有

$$\lim_{x\to\infty}\arctan x=\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\lim_{x\to-\infty}\arctan x$$

但实际上 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x\neq\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$.

函数的极限与数列的极限通过归结原理联系起来, 即函数的极限可以归结为数列的极限. 这一定理常用于证明函数在某点处的极限不存在.

定理 3.1. (归结原理) 设 f 在 $U^\circ(x_0;\delta')$ 内有定义, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是: 对任何含于 $U^\circ(x_0;\delta')$ 且以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 都在且相等.

例 3.2. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 满足方程 $f(x^2)=f(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(1)$. 证明:$f(x)\equiv f(1)$.

解. 分析: 根据条件 $f(x^2)=f(x)$, 如果我们取定一点 x_0, 那么函数在 $x_0,x_0^2,x_0^4,x_0^8,\cdots$ 的取值都是一样的, 换言之我们得到了一个数列, 使得函数在这个数列上取值相同. 所以通过这一数列, 我们就可以使用归结原则来讨论函数的性质. 注意到在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上的情况不同, 因此要分类讨论.

证明: 先假设 $x_0\in(0,1)$, 则 $x_n=x_0^{2^n}\in(0,1)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$. 由归结原则得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(1)$. 又由题目条件可知 $f(x_n)=f(x_0^{2^n})=f(x_0^{2^{n-1}})=\ldots=f(x_0)$, 于是 $f(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(1)$. 由 x_0 的任意性知在 $(0,1)$ 上 $f(x)\equiv f(1)$.

同理对于 $x_0\in(1,+\infty)$, 取 $x_n=x_0^{\frac{1}{2^n}}$ 讨论, 也可得在 $(1,+\infty)$ 上 $f(x)\equiv f(1)$.

因此在 $(0,\infty)$ 上成立 $f(x)\equiv f(1)$. 证毕. □

还有两个重要的概念是无穷小和无穷大. 首先要注意的是, 不论是无穷小还是无穷大, 它们指的都是某个函数, 而不能把无穷小理解成是很小的数, 也不能把无穷大理解成很大的数. 无穷小之间也是存在着收敛速度的差异的, 所以对不同的无穷小, 我们常常通过讨论它们的阶来比较它们的收敛速度. 此外, 等价无穷小替换定理也是一个非常有用的用于计算极限的定理, 在后面的小节中会再提到.

定义 3.4. (无穷小的比较和阶) 设当 $x\to x_0$ 时,f 与 g 均为无穷小量.
(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, 则称当 $x\to x_0$ 时 f 为 g 的**高阶无穷小量**, 或称 g 为 f 的低阶无穷小量, 记作 $f(x)=o(g(x))\ (x\to x_0)$.
(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$, 则称当 $x\to x_0$ 时 f 和 g 是**同阶无穷小量**, 记作 $f(x)=O(g(x))\ (x\to x_0)$.
(3) 特别地, 当 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, 则称当 $x\to x_0$ 时 f 和 g 是**等价无穷小量**, 记作 $f(x)\sim g(x)\ (x\to x_0)$.
(4) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{(x-x_0)^k}=A\neq 0(k>0)$, 则称 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时关于 $(x-x_0)$ 的 k **阶无穷小**.

例 3.3. (P69.45) 当 $x\to 0^+$ 时, 求下列无穷小关于 x 的阶数:
(1)$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}$;　(2)$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}$.

解. 分析: 求无穷小 $f(x)$ 的阶数, 按照定义只需要找到一个 $k>0$, 使得 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x^k}$ 是非零常数即可. 因此常常通过构造并计算极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x^k}$, 考察取什么样的 k 能够让这一极限为非零常数, 这样的 k 就是 $f(x)$ 的无穷小的阶数.

解:(1) 设阶数为 $k(k>0)$, 则应有 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}}{x^k}\neq 0$. 又因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}}{x^k}&=\lim_{x\to0^+}\sqrt{\frac{x+\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}{x^{2k}}}\\&=\lim_{x\to0^+}\sqrt{x^{1-2k}+\sqrt{\frac{x+\sqrt[3]{x}}{x^{4k}}}}\\&=\lim_{x\to0^+}\sqrt{x^{1-2k}+\sqrt{x^{1-4k}+\frac{\sqrt[3]{x}}{x^{4k}}}}\\&=\lim_{x\to0^+}\sqrt{x^{1-2k}+\sqrt{x^{1-4k}+x^{\frac{1}{3}-4k}}}\end{aligned}$$

上述极限若不为 0, 则需要有 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{1}{3}-4k}\neq0$, 则 $\frac{1}{3}-4k=0$. 从而 $k=\frac{1}{12}$.

(2) 设阶数为 $k(k>0)$, 则应有 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^k}\neq0$. 又因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^k}&=\lim_{x\to0^+}\frac{(1+\tan x)-(1+\sin x)}{x^k\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{x^k\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x(1-\cos x)}{2x^k}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{2x^k}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0^+}x^{3-k}.\end{aligned}$$

上述极限若不为 0, 则只能有 $3-k=0$, 解得 $k=3$. □

之后在研究带佩亚诺余项的泰勒公式时, 还会使用无穷小的性质来对函数做余项分析.

3.2 函数的连续性

定义 3.5. 设 $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}, D$ 包含 x_0 的某个邻域. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, 则称 f **在** x_0 **处连续**. 类似可以定义左连续和右连续.

如果一个函数在某点不连续, 那么该点就是函数的一个间断点. 对于间断点, 我们把它们分为以下几类:

定义 3.6. (1) 如果 f 在 x_0 处左极限和右极限都存在但 f 在 x_0 处不连续, 则称 x_0 是 f 的**第一类间断点**. 特别地, 如果左极限和右极限都存在但不相等, 则称 x_0 是 f 的**跳跃间断点**; 如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 但极限值不等于 $f(x_0)$ 或者 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在但 f 在 x_0 处没有定义, 则称 x_0 是 f 的**可去间断点**;
(2) 如果 f 在 x_0 处的左极限和右极限至少有一个不存在, 则称 x_0 是 f 的**第二类间断点**.

例 3.4. 指出下列函数的间断点并确定其类型.
$(1)f(x) = \dfrac{1}{1-2^{\frac{x}{x-1}}}$; $\quad$ $(2)f(x) = [x]\sin\dfrac{1}{x}$.

解. 分析: 先找到哪些点可能是间断点, 然后按照定义判断即可.
解:(1) 可能的间断点为 $x=0$ 与 $x=1$.

对 $x=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} 2^{\frac{x}{x-1}} = 1$, 则 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{1-2^{\frac{x}{x-1}}}$ 不存在, 故 $x=0$ 为第二类间断点.

对 $x=1$, 由于 $x\to 1^-$ 时 $\frac{x}{x-1}\to -\infty, x\to 1^+$ 时 $\frac{x}{x-1}\to +\infty$, 则

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-2^{\frac{x}{x-1}}} = \frac{1}{1} = 1, \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-2^{\frac{x}{x-1}}} = 0$$

则 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, 从而 $x=1$ 为跳跃间断点.
(2)$f(x)$ 可能的间断点为 $x=k, k\in\mathbb{Z}$. 由取整函数可知, $\lim\limits_{x\to k^-}[x] = k-1$, $\lim\limits_{x\to k^+}[x] = k$.

对 $x=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}[x]\sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} -\sin\frac{1}{x}$, 从而 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 不存在, 故 $x=0$ 为第二类间断点.

对 $x=k, k\in\mathbb{Z}$ 且 $k\neq 0$, 有 $\sin\frac{1}{k}\neq 0$ 成立. 同时

$$\lim_{x\to k^-} f(x) = \lim_{x\to k^-}[x]\sin\frac{1}{x} = (k-1)\sin\frac{1}{k}, \lim_{x\to k^+} f(x) = \lim_{x\to k^+}[x]\sin\frac{1}{x} = k\sin\frac{1}{k}$$

因此有 $\lim\limits_{x\to k^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to k^+} f(x)$, 从而 $x=k, k\in\mathbb{Z}$ 且 $k\neq 0$ 为跳跃间断点. 综上所述, $f(x)$ 有第二类间断点 $x=0$, 跳跃间断点 $x=k, k\in\mathbb{Z}$ 且 $k\neq 0$. □

例 3.5. (P66.18) 设 $b>a$, a,b 为常数, $\forall\delta\in(0,\frac{b-a}{2})$, $f(x)$ 在闭区间 $[a+\delta, b-\delta]$ 上连续, 试问:
$(1)f(x)$ 在 (a,b) 内是否连续? $\quad$ $(2)f(x)$ 在 $[a,b]$ 内是否连续?

解. (1) 对任意 $x_0\in(a,b)$, 取 $\delta=\min\{x_0-a, b-x_0\}$, 则此时有 $\delta\in\left(0,\frac{b-a}{2}\right)$ 成立. 又可知 $x_0=a+\delta$ 或 $b-\delta$, 即此时 x_0 为上述闭区间的一侧边界. 又因为 $f(x)$ 在闭区间 $[a+\delta, b-\delta]$ 上连续, 所以此时 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 所以对任意

$x_0 \in (a,b), f(x)$ 在 x_0 处连续, 从而 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

(2) 不一定连续. 假设 $a=0, b=1$, 此时取 $f(x)=\begin{cases} 1, & x=0, \\ 0, & x\in(0,1] \end{cases}$ 则 $f(x)$ 满足题设条件, 但是 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不连续. 因此不能保证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定连续. □

例 3.6. (1)(P67.30) 设 $f(x)=\dfrac{\sin ax}{x(x-1)}$($a$ 为常数, 且 $0<a<2\pi$), 试补充定义 $f(x)$ 在 $x=0$ 与 $x=1$ 处的值, 并确定 a 的值, 使补充定义后的函数在闭区间 [0,1] 上连续.

(2)(P67.31) 确定常数 a,b, 使得下述 $f(x)$ 在定义区间上连续:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-ax}-1}{x}, & x<0, \\ ax+b, & 0\le x\le 1, \\ \arctan\dfrac{2}{x-1}, & x>1; \end{cases}$$

解. 分析: 这两个问题都是确定函数里的参数, 使得函数连续. 对于这类问题, 我们首先需要确定函数在哪些点处可能会不连续 (通常是分段函数的分段点、使函数无意义的点). 对于这些点, 我们要去考察函数在它们附近的极限的情况, 如通过考察左右极限来寻找使得该点连续的条件.

解:(1) 由题可知, $f(x)$ 在 (0,1) 上连续, 只需使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续, 在 $x=1$ 处左连续即可. 在 $x=1$ 的左邻域内有

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{\sin ax}{x(x-1)}=\lim_{x\to1^-}\frac{\sin ax}{x-1}.$$

为使得上述极限存在, 且 $\lim\limits_{x\to1^-} x-1=0$, 此的则应有 $\lim\limits_{x\to1^-}\sin ax=\sin a=0$. 由于 $0<a<2\pi$, 则此时有 $a=\pi$, 且此时有

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{\sin\pi x}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-\sin\pi(x-1)}{x-1}=-\pi\lim_{x\to1^-}\frac{\sin\pi(x-1)}{\pi(x-1)}=-\pi$$

在 $x=0$ 的右邻域内有

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{a}{x-1}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{a}{x-1}=1\cdot(-a)=-a=-\pi$$

由上可知, 补充定义 $f(0)=-\pi, f(1)=-\pi$, 且 $a=\pi$, 则此时补充定义后的函数在 [0,1] 上连续.

(2) 此时需使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处连续. 因此有

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^+} f(x)=f(0)=b, \quad \lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^+} f(x)=f(1)=a+b.$$

又因为

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{1-ax}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{(1-ax)-1}{x(\sqrt{1-ax}+1)}=\lim_{x\to0^-}\frac{-a}{\sqrt{1-ax}+1}=-\frac{a}{2}$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\arctan\frac{2}{x-1}=\frac{\pi}{2}.(x\to1^+\text{时}\frac{2}{x-1}\to+\infty)$$

从而有 $\begin{cases}-\dfrac{a}{2}=b,\\ \dfrac{\pi}{2}=a+b,\end{cases}$. 解得 $a=\pi,b=-\frac{\pi}{2}$. □

对于闭区间上的连续函数, 则由连续性可以推出很多良好的性质, 如有界性、最值存在性、零点存在性以及介值定理等. 值得注意的是, 这些定理的成立需要以“连续函数”和“闭区间”为前提, 这些前提缺一不可.

例 3.7. (P70.51) 证明: 任何一个奇次 (最高次数为奇数) 的实系数多项式至少有一个实根.

解. 分析: 显然应该考虑零点的存在性定理. 由于奇次实系数多项式在 $\mathbb{R}$ 上连续, 所以我们只要找到一个闭区间, 使得在这个闭区间两端点上多项式有相反的符号. 此时就需要用到奇次多项式的性质.

证明: 对任一实系数多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0(a_n\neq0)$, 设 n 为奇数. 此时不妨设 $a_n>0(a_n<0$类似可证). 令 $g(x)=a_nx^n$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$. 又 $f(x)=g(x)\cdot\left(1+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right)$, 则有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

由上述极限可知, $\forall M>0,\exists N>0$, 当 $x>N$ 时, $f(x)>M>0;\forall M'<0,\exists N'<0$, 当 $x<N'$ 时,$f(x)<M'<0$. 故 $f(x)$ 在 $[N'-1,N+1]$ 上连续, 且 $f(N'-1)<0,f(N+1)>0$. 由零点存在定理, $\exists\xi\in(N'-1,N+1)$ 使得 $f(\xi)=0$. 因此任何一个奇次 (最高次数为奇数) 的实系数多项式至少有一个实根. □

例 3.8. (P70.63) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$, 试证在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使

$$f(\xi)=\frac{2}{n(n+1)}\left[f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+nf(x_n)\right].$$

解. 由最值定理,$f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有最值, 设最大值为 M, 最小值为 m. 则

对 $i=1,2,\cdots,n$, 均有 $m\le f(x_i)\le M$ 成立. 因此

$$\begin{aligned}\frac{2}{n(n+1)}(m+2m+\cdots+nm)&\le\frac{2}{n(n+1)}[f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+nf(x_n)]\\&\le\frac{2}{n(n+1)}(M+2M+\cdots+nM)\end{aligned}$$

又因为

$$\frac{2}{n(n+1)}(M+2M+\cdots+nM)=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n(nM+M)}{2}=M$$

$$\frac{2}{n(n+1)}(m+2m+\cdots+nm)=m$$

则有 $m\le\frac{2}{n(n+1)}[f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+nf(x_n)]\le M$ 成立. 由介值定理, 在 (a,b) 内至少有一点 ξ, 使得

$$f(\xi)=\frac{2}{n(n+1)}[f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+nf(x_n)].$$

□

3.3 计算极限的常用方法

不论是计算数列极限还是函数极限, 极限的计算一般总结为如下方法:

(1) 利用等价无穷小替换：在求某个乘除式子的极限时, 可以把其中某个是无穷小的因子做等价替换而不改变原极限. 如当 $x\to0$ 时有等价关系 $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$ 等, 以及 $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\tan x-x\sim\frac{x^3}{3},(1+x)^a-1\sim ax$.

(2) 利用初等变形方法 (如三角公式、分母有理化) 以及变量替换方法等将原式化为易求极限的形式, 然后用四则运算法则等计算.

(3) 利用无穷小量和有界量的乘积还是无穷小量;

(4) 利用重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 和 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. 特别是处理底数和指数同时有变量的式子时, 可以考虑化为以 e 为底数的式子来做.

(5) 可以结合函数的连续性计算函数的极限, 比如对一些极限存在且非零的连续函数因式, 可以直接先用连续性把这部分的极限值求出来, 再去计算其他部分.

(6) 利用夹逼定理计算极限.

(7) 利用洛必达法则、泰勒公式、定积分的定义和无穷级数的性质等求极限 (之后会学习这些内容).

例 3.9. (有技巧性的数列极限补充) 计算下列 $\{a_n\}$ 的极限.

(1)$a_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$, 其中 x 为一个非零常数.

$(2)a_n=(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2})^n$, 其中 $a\geq 0, b\geq 0$.

$(3)a_n=\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

解. (1) 原式分子分母同乘 $2^n\sin\frac{x}{2^n}$ 并利用三角公式 $\sin 2x=2\sin x\cos x$ 逐次化简分子:

$$a_n=\frac{2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{2^{n-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\cdots=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}$.

(2) 化为以 e 为底数的形式:$(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2})^n=e^{n\ln(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1+1)}$. 因 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1)=0$, 则上式在求极限时可以做等价替换 $\ln(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1+1)\sim(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1)$. 于是有

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2})^n=\lim_{n\to\infty}e^{n(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1)}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{2}(\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{\frac{1}{n}})}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}(\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{\frac{1}{n}})}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}}=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{b}-1}{\frac{1}{n}}=b$, 得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e^{\frac{1}{2}\ln a+\ln b}=\sqrt{ab}$.

$(3)\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi)=\sin^2(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n})$ 于是由函数 $f(x)=\sin^2 x$ 的连续性可得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\sin^2(\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n})=\sin^2\frac{\pi}{2}=1$$

□

注 3.2. 第 (1) 问中的数列通项由三角函数的累乘表示, 可以预见这个式子直接求极限是求不出的, 因此考虑根据它的结构特点利用三角公式变成一个易求的式子计算. 第 (2) 问的通项可以利用等价替换转化为一个底数和指数同时有变量 n 的式子, 因而进一步考虑化为以 e 为底数的式子计算. 第 (3) 问初看可能根本想不到这个数列是收敛的, 而是结合了三角变换以及有理化等方法, 结合函数的连续性才得以求出它的极限. 因此, 在求极限的时候, 各种方法的选取是非常灵活的, 有时候也会同时用上好几种方法.

例 3.10. ($\frac{0}{0}$ 型的极限: 对分子或分母进行合理的等价无穷小替换)

计算下列极限:

$(1)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan(x+a)-\arctan a}{x}$;　$(2)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\tan x}$, n 是正整数;

$(3)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-2x^2}}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}$;　$(4)\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$;

解. 分析: 所谓 $\frac{0}{0}$ 型的极限, 就是这个极限式子的分子分母都是一个无穷小量. 既然分子分母都是无穷小量, 那么就可以对分子或分母整体使用等价无穷小量替换定理. 一般我们总是把看起来比较复杂的无穷小量换成形如 ax^k 的多项式 (也是

无穷小量), 因为多项式往往是最好处理的.

解:(1) 利用 arctan 的恒等公式 $\arctan x - \arctan y = \arctan\frac{x-y}{1+xy}$ 有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x+a)-\arctan a}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\arctan\frac{x}{1+(x+a)a}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+(x+a)a}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{ax+a^2+1} = \frac{1}{1+a^2}.$$

(2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{n}}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{n}\sin x}{x} = \frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{n}.$$

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-2x^2}}{\ln(1+x)+\ln(1-x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-2x^2})(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-2x^2})}{\ln[(1+x)(1-x)](\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-2x^2})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-x^2)-(1-2x^2)}{\ln[1+(-x^2)]\cdot(\sqrt{1-0}+\sqrt{1-0})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(-x^2)\cdot 2} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x} &= \lim_{t\to 0}\frac{t}{1-2\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)} \quad (t = x-\frac{\pi}{3})\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{t}{1-2\left(\cos t\cos\frac{\pi}{3}-\sin t\sin\frac{\pi}{3}\right)}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{t}{1-\cos t+\sqrt{3}\sin t},\end{aligned}$$

而

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t+\sqrt{3}\sin t}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}+\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3}\sin t}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}t^2}{t}+\sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

因此

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{1-\cos t+\sqrt{3}\sin t} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

□

例 3.11. (1^∞ 型的极限: 化为以 e 为底数的指数函数或利用与 e 有关的重要极限)

计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}, 0<a<\pi$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$;

解. 分析: 对于 1^∞ 型的极限, 通过化为以 e 为底数的指数函数就可以转化为“$e^{\frac{0}{0}}$”类型的极限来做. 此时再对指数部分进行等价无穷小量替换, 并利用指数函数的连续性就可以求出原极限. 当然这类极限也可以凑配成与 e 有关的重要极限的形式, 不过凑配的过程需要注意每一步都要有理有据.

解:(1)(法 1) 原式 $=\lim\limits_{x\to a} e^{\frac{\ln(\frac{\sin x}{\sin a})}{x-a}} = e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln(\frac{\sin x}{\sin a}-1+1)}{x-a}} = e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{\sin x}{\sin a}-1}{x-a}} = e^{\frac{1}{\sin a}\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}}$

又因为由和差化积公式有

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{2}{x-a}\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2} = \lim_{x\to a}\frac{2}{x-a}\frac{x-a}{2}\cos a = \cos a$$

因此原极限 $=e^{\frac{\cos a}{\sin a}} = e^{\cot a}$.

(法 2)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin(t+a)}{\sin a}\right)^{\frac{1}{t}} \qquad (t=x-a)\\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t\cos a+\sin a\cos t}{\sin a}\right)^{\frac{1}{t}}\\
&= \lim_{t\to 0}(1+\cos t+\cot a\sin t-1)^{\frac{1}{t}}\\
&= \lim_{t\to 0}[1+(\cos t-1+\cot a\sin t)]^{\frac{1}{\cos t-1+\cot a\sin t}\cdot\frac{\cos t-1+\cot a\sin t}{t}}\\
&= \lim_{t\to 0} e^{\frac{\cos t-1+\cot a\sin t}{t}}\\
&= e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t}+\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cot a\sin t}{t}}\\
&= e^{-\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{2}t+\cot a}\\
&= e^{\cot a}
\end{aligned}$$

(2)(法 1)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x} &= \lim_{t\to 0}(\sin 2t+\cos t)^{\frac{1}{t}} \quad (t=\frac{1}{x})\\
&= \lim_{t\to 0} e^{\frac{\ln(\sin 2t+\cos t)}{t}} = e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+\sin 2t+\cos t-1)}{t}}\\
&= e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin 2t+\cos t-1}{t}}\\
&= e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{t}+\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t}}\\
&= e^{2-\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{2}t} = e^2.
\end{aligned}$$

(法 2)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t\to 0}(1+(\sin 2t+\cos t-1))^{\frac{1}{t}} \quad (t=\frac{1}{x}) \\
&= \lim_{t\to 0}(1+(\sin 2t+\cos t-1))^{\frac{1}{\sin 2t+\cos t-1}\frac{\sin 2t+\cos t-1}{t}} \\
&= \lim_{t\to 0}(1+(\sin 2t+\cos t-1))^{\frac{1}{\sin 2t+\cos t-1}\cdot\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin 2t+\cos t-1}{t}} \\
&= e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{t}+\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t}} = e^2.
\end{aligned}$$

□

注 3.3. 若函数 f, g 满足 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$ 都存在且 $a>0$, 则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=a^b$$

第 4 章　导数与微分

4.1　导数的定义与四则运算

定义 4.1. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 若极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在, 则称函数 f 在点 x_0 处**可导**, 并称该极限为函数 f 在点 x_0 处的导数, 记作 $f'(x_0)$.

与高中数学不同的是, 现在我们讨论导数是建立在极限的基础上的, 这使得导数的定义变得更加严谨. 而且利用之前学习的极限的知识, 我们也能够计算出一些常用初等函数的导数:

(1)$(c)'=0\quad$ (c 为常数).

(2)$(x^a)'=ax^{a-1}\quad$ (a 为任意实数).

(3) $(\sin\ x)'=\cos\ x$, $(\cos\ x)'=-\sin\ x$.

(4)$(\tan x)'=\sec^2 x$, $(\cot x)'=-\csc^2 x$.

(5)$(\sec x)'=\sec x\tan x, (\csc x)'=-\csc x\cot x.$

(6) $(a^x)'=a^x\ln\ a$, $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$.

(7) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}, (\ln x)'=\frac{1}{x}$.

(8)$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(|x|<1), (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(|x|<1)$.

(9)$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}, (\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

此外, 我们还有如下的求导法则:

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$.

(2)$(uv)'=u'v+uv', (cu)'=cu'\quad$ (c为常数).

(3)$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}, \left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$.

(4) 反函数求导数: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$.

(5) 复合函数求导数 (链式法则): $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

(6) 隐函数求导数.

(7) 参数式函数求导数:$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, 其中

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}\qquad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

由于导数是用极限来定义的, 因此类似地我们也可以定义左、右导数.

定义 4.2. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某右邻域 $(x_0,x_0+\delta)$ 上有定义, 若右极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\quad(0<\Delta x<\delta)$$

存在, 则称该极限值为 f 在点 x_0 的右导数, 记作 $f'_+(x_0)$. 类似地, 我们可定义左导数

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

右导数和左导数统称为单侧导数.

如同左、右极限与极限之间的关系, 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 则 $f'(x_0)$ 存在的充要条件是 $f'_+(x_0)$ 与 $f'_-(x_0)$ 都存在, 且

$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0).$$

值得注意的是, 导数的左右极限和左右导数不是同一个概念. 导数的左右极限是把这个导数作为研究对象, 求它的左极限和右极限, 实际上是在计算函数的左右极限. 即使函数在某点处导数的左右极限不存在, 两个左右导数仍然可能是存在的. 在应用中, 左右导数常用于判断函数在某点是否可导, 而导函数的左右极限常用于判断函数的导函数在某点是否连续.

例 4.1. (1) 设 f 在 $x=0$ 处可导, $f(x)=f(0)+2x+\alpha(x), \lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x}=0$, 求 $f'(0)$.
(2) 设 f 在 x_0 处导数 $f'(x_0)$ 存在,α,β 为常数, 求 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h}$.

解. 分析: 这两个小问题都涉及到抽象函数 (具体表达式不知道的函数) 的导数问题. 对于这类问题, 我们可以用的工具仅有导数的定义以及导数的四则运算法则等. 所以我们从定义入手分析.

解:(1) 对于 $x\neq 0$, 有 $\frac{f(x)-f(0)}{x}=2+\frac{\alpha(x)}{x}$, 则根据导数的定义, 两边令 $x\to 0$ 可得 $f'(0)=2$.

(2) 已知条件是 $f'(x_0)$ 存在, 因此可以对待求式子进行凑配以出现 $f'(x_0)$ 的定义形式. 由于在某点处导数存在可以推出在该点处两个单侧导数也存在且值与导数值都相等, 因此

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-\beta h)-f(x_0)}{h}\\&=\alpha\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{\alpha h}+\beta\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-\beta h)-f(x_0)}{-\beta h}\\&=\alpha f'(x_0)+\beta f'(x_0)\end{aligned}$$

□

注 4.1. 对于 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f'(x_0)$, 左边的极限值等于导数值, 但它与导数定义不等价. 例如 $f(x)=|x|$ 在 $x_0=0$ 处满足 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h}=0$, 但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

例 4.2. 设 $f(x)=\begin{cases} x^a\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, 讨论 a 取什么值的时候 $f(x)$ 在 0 处
(1) 连续; (2) 可导; (3) 导数连续; (4) 二阶可导.

解. (1) 只要满足 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在且等于 $f(0)=0$, 就能推出 $f(x)$ 在 0 处连续. 注意到当 $a>0$ 时,x^a 是无穷小量,$\sin\frac{1}{x}$ 为有界量, 因此此时 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$; 而当 $a\leq 0$ 时,$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在, 则 $f(x)$ 不可能在 0 处连续. 因此只有当 $a>0$ 时,$f(x)$ 在 0 处连续.
(2) 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导, 则有 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 存在. 而

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^a\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x^{a-1}\sin\frac{1}{x}$$

则仅当 $a>1$ 时, 上述极限存在. 所以当 $a>1$ 时 $f(x)$ 在 0 处可导.
(3) 若 $f(x)$ 在 0 处导数连续, 则首先 $f'(0)$ 一定存在, 所以由 (2) 知此时至少要满足 $a>1$, 且此时 $f'(0)=0$. 又当 $x\neq 0$ 时, 根据函数表达式可以求出 $f'(x)=ax^{a-1}\sin\frac{1}{x}-x^{a-2}\cos\frac{1}{x}$, 因此有

$$f'(x)=\begin{cases} ax^{a-1}\sin\frac{1}{x}-x^{a-2}\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

若导数在 0 处连续, 则应有 $\lim\limits_{x\to 0}ax^{a-1}\sin\frac{1}{x}-x^{a-2}\cos\frac{1}{x}=0$. 此时由 $a>1$ 知 $\lim\limits_{x\to 0}ax^{a-1}\sin\frac{1}{x}=0$. 为使 $\lim\limits_{x\to 0}x^{a-2}\cos\frac{1}{x}=0$ 也成立, 则需满足 $a>2$. 因此只有当 $a>2$ 时 $f'(x)$ 在 0 处连续.
(4) 由题意此时 $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}$ 存在. 而

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{ax^{a-1}\sin\frac{1}{x}-x^{a-2}\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}ax^{a-2}\sin\frac{1}{x}-x^{a-3}\cos\frac{1}{x}$$

则上述极限存在, 只能取 $a>3$. 因此只有当 $a>3$ 时 $f''(0)$ 存在. □

注 4.2. 对这种在 0 处 (或者其他地方) 单独给出定义的函数, 在求 $f'(0)$ 时存在如下常见的错误: 很多同学求 $f'(0)$ 的是时候是先求出函数在除 0 外的其他地方的导数 $f'(x),x\neq 0$, 然后对上述定义在非零处的导数求它的当 $x\to 0^-$ 和 $x\to 0^+$ 时的极限, 把这两个极限值作为 $f'(0)$ 的值. 这实际上是弄混了左右导数和导数的左右极限的概念, 上述的做法就是错误地把导数的左右极限当成了左右

导数. 事实上只有在函数的导数 $f'(0)$ 在 0 处连续时, 上述做法才是对的, 否则就是错误的. 一般来说, 求这种单独定义的点处的导数值, 我们需要从导数的定义或者左右导数的定义入手来计算, 这样得到的才是正确的值.

例 4.3. (1) 设 $f(x)=\begin{cases} ax^2+b, & x\geq 1\\ x\cos\frac{\pi x}{2}, & x<1\end{cases}$, 且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 求 a,b 的值.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leq 1\\ ax+b, & x>1\end{cases}$, 且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 求 a,b 的值.

解. (1) 注意函数在某点可导隐含着函数在该点连续的条件 (“可导必连续”), 则有 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$, 即得 $a+b=0$. 又 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导, 则有 $f'_-(1)=f'_+(1)$. 而

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x\cos\frac{\pi x}{2}-(a+b)}{x-1}=-\frac{\pi}{2}, f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax^2+b-(a+b)}{x-1}=2a$$

因此得 $2a=-\frac{\pi}{2}$, 解得 $a=-\frac{\pi}{4}, b=\frac{\pi}{4}$.

(2)$f(x)$ 在 1 处必连续, 则由 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b$, 可知 $1=a+b=f(1)=1^2=1$.

再考虑可导性, 由

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b-1}{x-1}$$

由于 $a+b=1$, 则 $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{ax+b-(a+b)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{a(x-1)}{x-1}=a$. 为保证可导, 有 $f'_-(1)=f'_+(1)$, 即 $a=2$. 从而 $b=1-a=-1$. □

注 4.3. 对于这类问题, 通常先从可导隐含的连续性条件得到关于参数的第一个方程, 再从可导的条件得到关于参数的第二个方程, 两个方程联立解出参数即可.

例 4.4. (P90.14) 设 $g(x)=\begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 又函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 求函数 $\varphi(x)=f(g(x))$ 在点 $x=0$ 处的导数.

解. 分析: 注意到 $g(x)$ 在 0 点是单独定义的, 因此在求 $f(g(x))$ 在 0 处的导数时要使用导数的定义式求解. 因此按照定义写出 $\varphi'(x)$, 然后再去计算这一极限值.

解: 注意到

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(g(x))-f(g(0))}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(xe^{-\frac{1}{x^2}}\right)-f(0)}{x}$$

而 $\lim\limits_{x\to0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, 则 $\lim\limits_{x\to0} xe^{-\frac{1}{x^2}} = 0$. 令 $t = xe^{-\frac{1}{x^2}}$, 则 $x \to 0$ 时 $t \to 0$. 从而

$$f'(0) = \lim_{t\to0} \frac{f(t)-f(0)}{t} = \lim_{x\to0} \frac{f\left(xe^{-\frac{1}{x^2}}\right)-f(0)}{xe^{-\frac{1}{x^2}}}.$$

因此 $\lim\limits_{x\to0} \frac{f\left(xe^{-\frac{1}{x^2}}\right)-f(0)}{x} = f'(0)\lim\limits_{x\to0} e^{-\frac{1}{x^2}} = f'(0)\cdot 0 = 0$. 从而有 $\varphi'(0) = 0$. □

注 4.4. 注意, 题目中只提到 $f(x)$ 在 0 处可导, 并没有说它在 $g(x)$ 值域里面的其他地方可导, 所以不能写诸如 "$\varphi'(x) = f'(g(x))g'(x)$" 的式子, 因为这里 $f'(g(x))$ 很可能没有意义.

例 4.5. (隐函数/参数式函数求导)

(1) 求 $e^{x^2-y^2} = \cos 2x$ 确定的隐函数 $y = y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$;

(2) 求参数方程 $\begin{cases} x = 1+2t, \\ y^2 - t^2 = 1 - \ln y. \end{cases}$ 确定的函数的导数 $\frac{dy}{dx}$.

解. 分析: 按照隐函数以及参数式函数的求导公式计算即可. 一般来说, 此时求出的导数里还会含有 x, y 或者参数 t 等.

解:(1) 两边对 x 求导有 $e^{x^2-y^2}\cdot\left(2x - 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = -2\sin 2x$, 整理得

$$-2ye^{x^2-y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2\sin 2x - 2xe^{x^2-y^2}$$

因此有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{xe^{x^2-y^2}+\sin 2x}{ye^{x^2-y^2}}$.

(2)$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2$, 考虑等式 $y^2 - t^2 = 1 - \ln y$, 等号两侧对 t 求导, 则有

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 2t = -\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

解得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{2yt}{2y^2+1}$. 因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{yt}{2y^2+1}.$$

□

例 4.6. (对数求导法) 求下列函数的导数:

(1)$y = \sqrt{e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x\sqrt{\sin x}}}$; (2)$y = x^{x^x}$.

解. 分析: 对于存在着乘积、分式、多重根号或者多重指数的函数, 可以先两边取对数 (转化为隐函数), 然后用隐函数求导法求导. 取对数可以把原来较复杂的函数变成一些较简单的函数的和, 既避免了使用函数的乘法求导法则, 也避免了对

一些复杂的复合函数直接求导. 如果取一次对数还不够, 也可以多取几次.
解:(1) 两边取对数:

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln(e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x\sqrt{\sin x}})=\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}\ln(x\sqrt{\sin x})=\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}\ln x+\frac{1}{8}\ln\sin x$$

再两边对 x 求导:

$$\frac{y'}{y}=-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4x}+\frac{1}{8}\cot x$$

所以 $y'=y(-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4x}+\frac{1}{8}\cot x)=\sqrt{e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x\sqrt{\sin x}}}(-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4x}+\frac{1}{8}\cot x)$.
(2) 两边取两次对数:

$$\ln y=x^x\ln x,\ln(\ln y)=\ln(x^x\ln x)=x\ln x+\ln(\ln x)$$

再两边求导得

$$\frac{y'}{\ln y\cdot y}=\ln x+1+\frac{1}{x\ln x}$$

因此 $y'=x^{x^x+x-1}\left(x\ln^2 x+x\ln x+1\right)$. □

4.2 高阶导数

定义 4.3. 若函数 f 的导函数 f' 在点 x_0 可导, 则称 f' 在点 x_6 的导数为 f 在点 x_0 的二阶导数, 记作 $f''(x_0)$, 即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=f''(x_0),$$

同时称 f 在点 x_0 为二阶可导. 一般地, 可由 f 的 $n-1$ 阶导函数定义 f 的 n 阶导函数 (或简称 n 阶导数). 二阶以及二阶以上的导数都称为高阶导数, 函数 f 在点 x_0 处的 n 阶导数记作

$$f^{(n)}(x_0),y^{(n)}\big|_{x=x_0}\text{ 或 }\left.\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=x_0}.$$

相应地,n 阶导函数记作

$$f^{(n)},y^{(n)}\text{ 或}\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}.$$

一些初等函数的高阶导数可以直接计算得到, 如

$$\sin^{(n)}x=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\cos^{(n)}x=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),n\in\mathbb{N}_+$$

而对于更一般的高阶导数, 就需要用到高阶导数的四则运算法则来求解. 这里最特殊的是高阶导数的莱布尼兹公式:

定理 4.1. 若函数 u 和 v 均 n 阶可导, 则乘积函数 uv 也 n 阶可导, 且

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}$$

其中 $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

这一公式的形式与二项式展开是非常相似的. 特别地, 当 u 或 v 是一个低次多项式的时候, 使用莱布尼兹公式计算 uv 的高阶导数会很方便.

例 4.7. (P94.46) 设 $y = \arcsin x$.
(1) 证明:$(1-x^2)y'' - xy' = 0$;
(2) 证明: $(1-x^2)y^{(n+2)} - x(1+2n)y^{(n+1)} - n^2 y^{(n)} = 0$, $n = 1, 2, 3, \cdots$;
(3) 导出递推公式 $y^{(n+2)}(0) = n^2 y^{(n)}(0), n = 0, 1, 2, \cdots, y^{(0)}(0) = y(0) = 0, y'(0) = 1$, 并求出

$$y^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ [(2k-1)!!]^2, & n = 2k+1, \end{cases} \quad k = 1, 2, \cdots .$$

解. (1) 由于 $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, y'' = -\frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, 因此

$$(1-x^2)y'' - xy' = \frac{x(1-x^2)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

(2) 根据 (1) 的结论, 对 (1) 中等号两边求 n 次导数, 注意到当 $n > 2$ 后 $(1-x^2)^{(n)} = 0$, 因此由莱布尼兹公式得:

$$[(1-x^2)y^{(n+2)} - 2nxy^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)}] - (xy^{(n+1)} + ny^{(n)}) = 0$$

即 $(1-x^2)y^{(n+2)} - x(1+2n)y^{(n+1)} - n^2 y^{(n)} = 0$.
(3) 对 (2) 中得到的式子代入 $x = 0$ 得

$$(1-0)y^{(n+2)}(0) - 0 - n^2 y^{(n)}(0) = 0, \text{ 即} y^{(n+2)}(0) = n^2 y^{(n)}(0), n = 1, 2, 3, \cdots .$$

且 $y(0) = 0$, 又由 (1) 可知 $y''(0) = \frac{0}{(1-0)^{\frac{3}{2}}} = 0$, 则 $n = 0$ 时 $y^{(n+2)}(0) = 0 = n^2 y^{(n)}(0)$ 成立, 则有递推公式

$$y^{(n+2)}(0) = n^2 y^{(n)}(0), n = 0, 1, 2, \cdots .$$

由于 $y^{(0)}(0) = 0, y'(0) = \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1$, 则对 $k \in \mathbb{N}_+$, 当 $n = 2k$ 时,$y^{(n)}(0) = 0$. 当 $n = 2k+1$ 时,
$y^{(n)}(0) = y^{(2k+1)}(0) = (2k-1)^2 y^{(2k-1)}(0) = \cdots = [(2k-1)^2 \cdot (2k-3)^2 \cdots 3^2 \cdot 1^2] y'(0) = [(2k-1)!!]^2$.
因此

$$y^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ [(2k-1)!!]^2, & n = 2k+1, \end{cases} \quad k = 1, 2, \cdots .$$

□

例 4.8. 证明勒让德多项式 $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$ 满足：
(1)$P_n(1)=1;\ P_n(-1)=(-1)^n$;
(2)$(1-x^2)P_n''(x)-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)=0$.

解. (1) 令 $f(x)=(x^2-1)^n=(x-1)^n(x+1)^n$, 则由莱布尼兹公式

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x)&=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left[(x-1)^n\right]^{(n-i)}\left[(x+1)^n\right]^{(i)}\\&=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{n!}{i!}(x-1)^i\cdot\frac{n!}{(n-i)!}(x+1)^{n-i}.\end{aligned}$$

令 $\varphi(x)=\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]=f^{(n)}(x)$, 注意到上述的和式中只有当 $i=0$ 的项才不包含因式 $x-1$, 也因此

$$f^{(n)}(1)=\binom{n}{0}\frac{n!}{(n-0)!}(1+1)^n=2^n n!.$$

同理上述的和式中只有当 $i=n$ 的项才不包含因式 $x+1$, 因此

$$f^{(n)}(-1)=\binom{n}{n}\frac{n!}{n!}(-1-1)^n=(-2)^n n!$$

则 $\varphi(1)=2^n n!,\varphi(-1)=(-2)^n n!$. 又由于 $P_n(x)=\frac{\varphi(x)}{2^n n!}$, 因此有

$$P_n(1)=1,\ P_n(-1)=(-1)^n$$

(2) 注意到 $P_n(x)=\frac{f^{(n)}(x)}{2^n n!}=\frac{\varphi(x)}{2^n n!}$, 由于 $P_n'(x)=\frac{\varphi'(x)}{2^n n!}=\frac{f^{(n+1)}(x)}{2^n n!},P_n''(x)=\frac{\varphi''(x)}{2^n n!}=\frac{f^{(n+2)}(x)}{2^n n!}$, 则要证

$$(1-x^2)P_n''(x)-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)=0$$

只需证

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-2xf^{(n+1)}(x)+n(n+1)f^{(n)}(x)=0.$$

对 $f(x)=(x^2-1)^n$, 有 $f'(x)=n(x^2-1)^{n-1}\cdot 2x=2nx(x^2-1)^{n-1}=2nx\frac{f(x)}{x^2-1}$, 即 $(x^2-1)f'(x)=2nxf(x)$. 对该等式两边对 x 求 $n+1$ 次导，由莱布尼茨公式可得

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(x^2-1)^{(n+1-k)}f^{(k+1)}(x)=2n\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{(n+1-k)}f^{(k)}(x).$$

由于 $(x^2-1)'=2x,\ (x^2-1)''=2$, 且 $i>2$ 时有 $(x^2-1)^{(i)}=0$, 且 $i>1$ 时

$x^{(i)}=0, x'=1$. 对上述等式转化则有

$$
\begin{aligned}
&(x^2-1)f^{(n+1+1)}(x)+(n+1)\cdot 2x\cdot f^{(n+1)}(x)+\frac{(n+1)n}{2}\cdot 2f^{(n-1+1)}(x)\\
&=(x^2-1)f^{(n+2)}(x)+2x(n+1)f^{(n+1)}(x)+n(n+1)f^{(n)}(x)\\
&=2n[xf^{(n+1)}(x)+(n+1)f^{(n)}(x)].
\end{aligned}
$$

移项得 $(x^2-1)f^{(n+2)}(x)+2xf^{(n+1)}(x)-n(n+1)f^{(n)}(x)=0$. 等式两边同乘 $-\frac{1}{2^n n!}$, 则有

$$(1-x^2)P_n''(x)-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)=0$$

□

例 4.9. (期中考试) 已知 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$, 求 $f^{(6)}(0)$.

解. 分析: 这是一个多项式乘上另一个函数的形式: $x\cdot(1+x)^{-\frac{1}{2}}$, 因此用莱布尼兹公式计算会比较方便. 关键是找到 $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ 的高阶导数的计算公式, 而这可以通过先求几个低次导数来找规律得到.

解: 根据高阶导数的 Leibniz 公式, 对 $f(x)=x\cdot(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ 有

$$f^{(n)}(x)=x(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot(1+x)^{-\frac{1}{2}-n}+C_n^1(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}}\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}-n}$$

因此 $f^{(6)}(0)=-\frac{6\times 9!!}{32}=-\frac{2835}{16}$. □

小结 4.1. 计算函数的高阶导数通常有如下方法:

(1) 如果函数的表达式比较简单具体, 可以使用莱布尼兹公式直接计算;

(2) 通过先求几个次数较低的导数, 找到高阶导数的规律, 然后用这一规律计算高阶导数. 例如, 可以寻找 $n+1$ 阶导数和 n 阶及以下次数导数的递推公式, 或者使用数学归纳法等计算;

(3) 有时也可以用泰勒公式反推高阶导数.

4.3 微分

定义 4.4. 设函数 $y=f(x)$ 定义在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内. 当给 x_0 一个增量 $\Delta x, x_0+\Delta x\in U(x_0)$ 时, 相

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

如果存在常数 A, 使得 Δy 能表示成

$$\Delta y = A\Delta x+o(\Delta x),$$

则称函数 f 在点 x_0 可微, 并称 $A\Delta x$ 为 f 在点 x_0 的微分, 记作

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0} = A\Delta x \quad \text{或} \quad \mathrm{d}f(x)\big|_{x=x_0} = A\Delta x$$

对于一元函数而言, 可微和可导是等价的, 而且微分运算有和求导运算相同的基本性质, 例如四则运算法则、复合函数的链式法则等. 这些性质就不再一一列举了. 但要注意的是, 尽管在各方面看起来很相似, 但是微分和导数本质上具有不同的意义. 这一点在推广到多元函数的微分学时会体现出来.

思考: 在导数和微分的定义中,$\mathrm{d}y$ 和 Δy 的区别在哪?

例 4.10. (期中考试) 设 $y = \arctan\frac{x+1}{x-1} + \ln\sqrt{1+x^2}$, 求: dy 与 $dy\big|_{x=3}$.

解.

$$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} = \frac{x-1}{x^2+1}.$$

所以 $\mathrm{d}y = \frac{x-1}{x^2+1}\mathrm{d}x.\mathrm{d}y\big|_{x=3} = \frac{1}{5}\mathrm{d}x.$ □

注 4.5. 注意一个函数的微分应该写成 $dy = \cdots dx$ 的形式, 不要把最后的 dx 忘记.

第 5 章　微分中值定理与导数应用

5.1　微分中值定理

定理 5.1. (费马定理) 设 x_0 为函数 f 的极值点, 若 f 在 x_0 处可微, 则 $f'(x_0) = 0$.

注 5.1. 但要注意的是, 导数为 0 的点不一定是该函数的极值点 (即费马定理的逆定理不成立). 例如函数 $f(x) = x^3$ 在 0 处满足 $f'(0) = 0$, 但是 0 不是它的极值点.

定理 5.2. (罗尔中值定理) 若函数 f 满足如下条件:
(1) f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
(2) f 在开区间 (a, b) 内可导;
(3) $f(a) = f(b)$.
则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi) = 0$.

定理 5.3. (拉格朗日中值定理) 若函数 f 满足如下条件:
(1) f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
(2) f 在开区间 (a, b) 内可导.
则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

定理 5.4. (柯西中值定理) 若函数 f, g 满足如下条件:
(1) 在 $[a, b]$ 上都连续;
(2) 在 (a, b) 上都可导;
(3)$f'(x)$ 和 $g'(x)$ 不同时为零;
(4)$g(a) \neq g(b)$.
则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

注 5.2. 在中值定理中, 这些"存在的 ξ"不一定是唯一的.

各种中值定理有着各自的特点, 因此在解决具体问题的时候, 也要根据问题的特点选取合适的定理来解决. 其中罗尔中值定理常用于证明结论是恒等式的证明题; 拉格朗日中值定理除了可以证明涉及导数的等式问题外, 还常用于证明

“函数值差”“自变量差” 类型的相关命题; 柯西中值定理常用于涉及到两个函数的差的比值的命题. 应用中值定理的关键是作出合适的辅助函数, 使得该函数满足中值定理的条件且与结论相关.

例 5.1. (P118.6) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导, 且有 $f(1)=2f(0)$, 证明在 (0,1) 内至少存在一点 ξ 使得 $(1+\xi)f'(\xi)=f(\xi)$ 成立.

解. 分析: 要证明的实际上是 $(1+x)f'(x)-f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有零点. 可以想到如果我们可以够造一个辅助函数 $h(x)$, 使得 $h'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有零点与上式在 $(0,1)$ 内有零点等价, 那么就可以以 $h(x)$ 为突破口进行证明. 这里需要注意到 $(1+x)f'(x)-f(x)$ 的形式和 $(\frac{f(x)}{1+x})'$ 有些相似, 因此考虑令 $h(x)=\frac{f(x)}{1+x}$.

证明: 原命题即证 $(1+x)f'(x)-f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有零点. 若令 $h(x)=\frac{f(x)}{1+x}$, 有 $h(0)=f(0), h(1)=\frac{f(1)}{2}=f(0)$, 且 $h'(x)=\frac{f'(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^2}$. 由罗尔定理, 至少存在一个 $\xi\in(0,1)$, 使得 $h'(\xi)=0$ 成立, 则此时由有 $f'(\xi)(1+\xi)-f(\xi)=0$ 成立. 即在 $(0,1)$ 内至少存在一 ξ 使 $f(\xi)=(1+\xi)f'(\xi)$ 成立. □

注 5.3. 这里不建议构造成 $h(x)=\frac{1+x}{f(x)}$, 因为这里的 $f(0)$ 取值不确定, 若它的值为 0 就会导致后续用到的 $\frac{1}{f(0)}$ 无意义. 因此在构造辅助函数时, 优先选择那些定义域清楚、不会产生无意义现象的函数.

例 5.2. (P118.7) 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在区间 (a,b) 内有二阶导数, 且 $f(a)=f(b)=0, f(c)<0(a<c<b)$, 证明: 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)>0$.

解. 分析: 本题要证明的是一个关于二阶导数的不等式. 由于是不等式, 所以较难用罗尔定理突破 (因为罗尔定理的结论是关于“$=0$”的等式的). 所以这里可以尝试用拉格朗日中值定理, 把这个二阶导数先用一阶导数表示出来, 即要找到存在一个 ξ 以及 d_1, d_2 使得 $f''(\xi)=\frac{f'(d_2)-f'(d_1)}{d_2-d_1}>0$, 然后再去证明右边的式子大于 0. 而这又需要我们根据题设条件推出 $f'(d_1), f'(d_2)$ 的性质.

证明: 由拉格朗日中值定理可得, $\exists d_1\in(a,c)$ 使得 $f'(d_1)=\frac{f(a)-f(c)}{a-c}<0$ 且 $\exists d_2\in(c,b)$ 使得 $f'(d_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}>0$. 继续在 $[d_1,d_2]$ 上用拉格朗日中值定理, 则 $\exists\xi\in(d_1,d_2)\subset(a,b)$, 使得 $f''(\xi)=\frac{f'(d_2)-f'(d_1)}{d_2-d_1}>0$, 得证.

□

例 5.3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导,$0\le a<b$, 则存在 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

解. 分析: 等式的左边可以用拉格朗日中值定理, 即这个“存在的 ξ”可以取为使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 成立的 ξ. 这样就只需证明: 存在 $\eta\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)\Longleftrightarrow\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\left.\frac{f'(x)}{(x^2)'}\right|_{x=\eta}$$

后者用柯西中值定理可以证明.

证明: 根据拉格朗日中值定理得, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, 于是只需证明: 存在 $\eta\in(a,b)$, 使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)\leftrightarrow\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}$$

或者

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\left.\frac{f'(x)}{(x^2)'}\right|_{x=\eta}$$

为此令 $g(x)=x^2$, 由 $g'(x)=2x\neq0(x\in(a,b))$ 以及 $g(a)\neq g(b)$ 知满足柯西中值定理条件, 因此 $\exists\eta\in(a,b)$ 使

$$\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}=\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}$$

证毕. □

例 5.4. (期中考试) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$,$f(1)=1$.
(1) 证明:$\exists c\in(0,1)$ 使得 $f(c)=\frac{3}{2023}$;
(2) 证明:$\exists\xi\neq\eta\in(0,1)$, 使得 $\frac{3}{f'(\xi)}+\frac{2020}{f'(\eta)}=2023$.

解. 分析: 第 (1) 问是容易的, 由介值定理直接可得; 对于第 (2) 问, 如果对数字敏感的话会发现 $2020=2023-3$, 而如果等式两边同除以 2023, 就会发现等号左边出现了 $\frac{3}{2023}$ 和 $\frac{2020}{2023}=1-\frac{3}{2023}$. 而根据第 (1) 题的提示, 我们已经找到了一个 c 使得 $f(c)=\frac{3}{2023}$, 因此顺着前面的分析对待证明的式子两边同除以 2023, 并结合 (1) 的结论, 就会发现待证明的式子转化成了

$$\frac{f(c)}{f'(\xi)}+\frac{1-f(c)}{f'(\eta)}=1$$

又题目条件告诉我们 $f(0)=0,f(1)=1$, 所以上面的式子又可以写成

$$\frac{f(c)-f(0)}{f'(\xi)}+\frac{f(1)-f(c)}{f'(\eta)}=1$$

到这里实际上就已经容易联系到拉格朗日中值定理了, 根据 $f(c)-f(0)$ 和 $f(1)-f(c)$ 两项可以联想到分别在区间 $[0,c]$ 和 $[c,1]$ 上用拉格朗日中值定理, 就可以找到两个符合题意的 $\xi\in(0,c)$ 和 $\eta\in(c,1)$.

证明:(1) 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=0,f(1)=1$, 根据连续函数的介值

性定理,$\exists c\in(0,1)$ 使得 $f(c)=\frac{3}{2023}$.

(2) 在区间 $[0,c][c,1]$ 上分别应用 Lagrange 中值定理:

$$f(c)-f(0)=f'(\xi)(c-0),\quad f(1)-f(c)=f'(\eta)(1-c).$$

其中 $\xi\in(0,c)$,$\eta\in(c,1)$. 进而 $\frac{f(c)}{f'(\xi)}=c$, $\frac{f(1)-f(c)}{f'(\eta)}=1-c$; 从而有 $\frac{f(c)}{f'(\xi)}+\frac{f(1)-f(c)}{f'(\eta)}=1$.

所以 $\frac{3}{f'(\xi)}+\frac{2020}{f'(\eta)}=2023$. □

例 5.5. (用中值定理证明等式/不等式)

(1) 证明 $1+\tan^2 x=\sec^2 x$;

(2) 证明 $|\sin x-\sin y|\le|x-y|,\quad(\forall x,y)$.

解. 分析: 如果是用中值定理证明等式, 则只要把等号左右两边移到等号同一侧, 即构造出“$f(x)=0$”的形式, 然后去证明 $f'(x)=0$ 即可; 如果是证明不等式, 则要利用中值定理把原不等式转化成关于导函数的一个不等式, 然后用导数做放缩证明.

(1) 令 $g(x)=1+\tan^2 x-\sec^2 x$, 则 $g'(x)=2\tan x\sec^2 x-2\sec x\cdot\sec x\tan x=0$, 由拉格朗日中值定理，则应有 $g(x)=C$ 成立，其中 C 为常数. 而 $g(0)=1+0^2-1^2=0$, 即 $C=0$, 从而有 $1+\tan^2 x-\sec^2 x=0$, 即 $1+\tan^2 x=\sec^2 x$.

(2) 当 $x=y$ 时不等式两边均取 0, 结论成立；当 $x\neq y$ 时，令 $f(x)=\sin x$, 则对 $\forall x,y$ 由拉格朗日中值定理，$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(\xi)=\cos\xi$, 其中 ξ 在 x 与 y 之间. 由于 $|\cos\xi|\le 1$, 则 $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\le 1$, 则此时有 $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$ 成立. 综上，$\forall x,y$ 有 $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$. □

小结 5.1. 从上面的例子可以看到, 用中值定理证明命题的一般步骤为:

(1) 根据题设条件选择合适的定理 (有时可能要同时使用多个定理或多次用一个定理);

(2) 构造合适的辅助函数或等式/不等式;

(3) 验证现有的函数满足中值定理的条件;

(4) 用中值定理得出结论.

这里最难的步骤还是第 (2) 步, 因为有时候根据题目信息很难一下子就把辅助函数的构造方法想出来. 因此这也需要大家对一些常见的式子结构有了解. 下面给出了一些常见的辅助函数构造方法:

1. 待证式子只含 $f(x),f'(x)$:

对 $f'(x)+af(x)=0$, 构造 $g(x)=f(x)\cdot e^{ax}$(a 可正可负);

对 $f(x)g'(x)+f'(x)=0$, 构造 $F(x)=f(x)e^{g(x)}$;

对 $f'(x)+f(x)=a$, 构造 $g(x)=(f(x)-a)e^x$;
2. 待证式子含有 $f(x),f'(x),x$:
对 $xf'(x)+af(x)=0$, 构造 $g(x)=f(x)\cdot x^a$;
对 $xf(x)+f'(x)=0$, 构造 $g(x)=f(x)e^{x^2/2}$;
3. 待证式子里还含有 $f''(x)$:
对 $f''(x)+f(x)=0$, 构造 $g(x)=f^2(x)+(f'(x))^2$;
对 $f''(x)-f(x)=0$, 因为这等价于 $f''(x)+f'(x)=f'(x)+f(x)$, 则构造 $g(x)=(f'(x)+f(x))e^{-x}$. 或者根据原式也等价于 $f''(x)-f'(x)=f(x)-f'(x)$, 构造 $g(x)=(f'(x)-f(x))e^x$.

5.2 洛必达法则

洛必达法则可以说是计算分式型不定式极限的“双刃剑”, 如果使用得当就可以帮助我们计算很多的不定式极限, 但如果错误使用就会出现很离谱的计算结果. 因此, 了解洛必达法则的使用条件以及结论非常重要. 洛必达法则有下面两种:

定理 5.5. ($\frac{0}{0}$ 型洛必达法则) 若函数 f 和 g 满足:
(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$;
(2) 在点 x_0 的某去心邻域 $U^\circ(x_0)$ 内两者都可导, 且 $g'(x)\neq 0$;
(3) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (A 可为实数, 也可为 ∞).
则
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

定理 5.6. ($\frac{*}{\infty}$ 型洛必达法则) 若函数 f 和 g 满足:
(1) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$;
(2) 在点 x_0 的某去心邻域 $U^\circ(x_0)$ 内两者都可导, 且 $g'(x)\neq 0$;
(3) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (A 可为实数, 也可为 ∞).
则
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

在实际应用中, 洛必达法则可以用于计算“$\frac{0}{0}$”“$\frac{*}{\infty}$”类型的极限外, 还能用来处理很多诸如“$\infty-\infty, 0\cdot\infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$”等类型的极限. 这些极限经过转化就可以化为前两种类型的极限来计算.

此外, 在使用洛必达法则前我们可以先对极限做等价无穷小替换, 然后再用洛必达法则. 这样能够大大降低求导数的复杂程度.

注 5.4. 在使用洛必达法则时, 一定要先检验 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 的极限是否存在, 只有存在时才能用, 否则不能使用洛必达法则. 例如, 对于极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=1$, 如果使用洛必达法则计算却得到 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ 不存在.

例 5.6. 用洛必达法则计算下列极限:

(1)($\frac{0}{0}$ 型) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$;

(2)($\frac{\infty}{\infty}$ 型) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^b}{e^{ax}}$, 其中 $a,b>0$;

(3)($\infty-\infty$ 型) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}^2-\cot^2 x)$;

(4)($0\cdot\infty$ 型) $\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$;

(5)(1^∞ 型) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$;

(6)(0^0 型) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)^{\frac{1}{\ln x}}$;

(7)(∞^0 型) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{2x-\pi}$.

解. (1)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-e}{x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\frac{\frac{x}{x+1}-\ln(1+x)}{x^2} \\
&= e\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{x+1}-\ln(1+x)}{x^2} = e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{1+x}}{2x} \\
&= e\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)}{2x(x+1)^2} = e\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(x+1)^2} = -\frac{e}{2}.
\end{aligned}$$

(2) 对 $b>0$, 设存在正整数 n 使得 $n-1\le b<n$ 成立，对原极限运用 n 次洛必达法则:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^b}{e^{ax}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{b(b-1)\cdots(b-n+1)x^{b-n}}{a^n e^{ax}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{b(b-1)\cdots(b-n+1)}{a^n e^{ax}x^{n-b}} = 0.$$

这里由于 $n-b>0$, 从而项 x^{n-b} 趋于无穷.

(3)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x+x\cos x)(\sin x-x\cos x)}{x^4}$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\cos x+\cos x-x\sin x = 2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}$$

因此原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

(4)

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$$

(5)

$$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{-1}}=e^{-1}$$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{\ln x}}$. 而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{\ln x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-1}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{(\frac{\pi}{2}-\arctan x)(1+x^2)}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{1+x^2}}{(\arctan x-\frac{\pi}{2})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}}{\frac{1}{1+x^2}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}=-1\end{aligned}$$

因此原式 $=e^{-1}$.

(7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{2x-\pi}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}e^{(2x-\pi)\ln\tan x}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(2x-\pi)\ln\tan x}$, 而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(2x-\pi)\ln\tan x&=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln\tan x}{\frac{1}{2x-\pi}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}{-\frac{2}{(2x-\pi)^2}}\\&=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sec^2 x(2x-\pi)^2}{2\tan x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{(2x-\pi)^2}{2\tan x\cos^2 x}\\&=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{(2x-\pi)^2}{2\sin x\cos x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{(2x-\pi)^2}{2\cos x}\\&=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{2(2x-\pi)\cdot 2}{-2\sin x}\\&=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}4(2x-\pi)=0,\end{aligned}$$

则原式 $=e^0=1$. □

注 5.5. 从上面的例题里面可以看到, 对于“$\infty-\infty, 0\cdot\infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$”等类型的极限, 可以通过通分、取 e 的指数等方法转化成“$\frac{0}{0}$”“$\frac{*}{\infty}$”类型的极限, 然后就可以用我们熟悉的方法来做了; 此外, 如果能够把等价无穷小代换和洛必达法则结合起来使用, 效果往往更好. 例如第 (3) 题在通分之后, 如果不对分母里的 $\sin^2 x$

先做等价替换, 那么对分母里重复求导数就会出现非常复杂的计算.

5.3 泰勒定理

之前在学习微分的时候, 曾提出用式子 $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 来近似替代函数 $f(x)$ 在 x_0 邻近处的取值, 但发现误差较大. 所以自然会思考是否会有更精确的方法可以用来近似估计 f 在某点的值. 通过计算发现, 使用次数更高的多项式比用上述一次多项式来逼近的精度更高, 由此, 利用 n 次多项式来做逼近与近似的效果会更好. 这也是引入泰勒公式的一个重要原因, 不论是函数的近似计算还是不等式估计, 泰勒公式都有巨大的作用.

定理 5.7. (带有佩亚诺余项的泰勒公式) 设 f 在 x_0 处存在 n 阶导数, 则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$

这里的形如 $o((x-x_0)^n)$ 的余项称为佩亚诺余项.

定理 5.8. (带有拉格朗日余项的泰勒公式) 若函数 f 在 $[a,b]$ 上存在直至 n 阶的连续导函数, 在 (a,b) 内存在 $(n+1)$ 阶导函数, 则对任意给定的 $x,x_0\in[a,b]$, 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

这里的形如 $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 的余项称为拉格朗日余项.

注 5.6. 带有这两种不同余项的泰勒公式常常用在不同的地方. 带有佩亚诺余项的泰勒公式常用于近似估计, 如在计算极限的时候可以把式子里的某项展成带佩亚诺余项的泰勒公式后进行计算; 带有拉格朗日余项的泰勒公式则常常用于放缩证明与原函数有关的不等式等.

函数在 $x=0$ 处的泰勒公式也称为麦克劳林公式. 一些常用函数的麦克劳林公式如下:

(1)$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{2!}+o(x^n)$

(2)$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$

(3)$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$

(4)$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$

(5)$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$

(6)$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$

上述这些公式常常用于在求极限时近似展开极限里面出现的某些复杂的函数, 进而把原来的极限变成一个多项式类型的极限, 那么求解起来就容易多了. 不过要注意, 在做泰勒展开后还会留下一个小量 $o(x^k)$, 这个量在求极限时不能落下.

在介绍如何用泰勒公式计算极限之前, 我们先回忆一下无穷小量 o 的几个性质 (实际上是 P69.47): 当 $x\to 0$ 时 (m,n 为正数), 有

(1)$o(x^m)+o(x^n)=o(x^k)$, 其中 $k=\min\{m,n\}$;

(2)$o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$;

(3) 若 $f(x)=o(x^n)$, 则 $f(x)=o(x^i)$, 其中 i 为小于 n 的任一正数. 特别地, 对于极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x^n)}{x^m}$, 当 $m\le n$ 时上述极限为 0, 当 $m>n$ 时上述极限不确定是否存在.

根据这几个性质, 在对 $f(x)+g(x)$ 或 $f(x)g(x)$ 类型的函数做泰勒展开时, 只要分别把 $f(x)$ 和 $g(x)$ 展开到合适的阶数, 然后使用上面的性质就可以得到最终的 o 里面的 x 的次数.

有了泰勒公式之后, 我们就能够从泰勒公式的观点看以前学习等价无穷小替换时候的一个问题: 为什么加减项里面不能随意地对每个单项做等价替换？这其实是因为如果随意地做替换, 那么替换得到的无穷小的阶数很可能是不正确的. 例如, 对于极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$, 如果按照以前的错误做法直接把 $\sin x$ 换成 x, 从泰勒公式的观点实际上是先把 $\sin x$ 展开成 $\sin x=x+o(x^2)$, 然后得到了

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x+o(x^2)-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^3}$$

但是这个极限值是不确定的, 因此这种计算方法不成立. 而如果把 $\sin x$ 展到 3 阶, 则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}+o(x^4)}{x^3}=-\frac{1}{6}$$

这样当展开后分子里 o 里面 x 的次数大于等于分母里 x 的次数时, 就可以把 o 消去, 顺利求出极限了.

例 5.7. 求下列极限:

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x-\sin x}$; (2)$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$.

解. 分析: 使用泰勒展开时要注意对 $o(x^n)$ 要合理选择，即展开到哪一项最合适，需要避免展开次数不够或者展开次数过多造成冗余计算. 判断的主要准则是展开后较低的阶消失，且更高的阶只有一项，例如第 (1) 题中, 在 $\sin x-x$ 中展开

$\sin x$ 时, 只需对 $\sin x$ 展开到 3 次方项, 而无需展开到 5 次方项, 否则就会出现冗余项.

(1)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x-\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-x\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{6}} \\
&= 2
\end{aligned}$$

(2) 令 $t=\frac{1}{x}$, 则

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{t\to 0^+}\left[\left(\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{2t}\right)e^t-\sqrt{1+\frac{1}{t^6}}\right] \\
&= \lim_{t\to 0^+}\frac{(2-2t+t^2)e^t-2\sqrt{1+t^6}}{2t^3} \\
&= \lim_{t\to 0^+}\frac{(2-2t+t^2)\left(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o(t^3)\right)-2\left(1+\frac{t^6}{2}+o(t^6)\right)}{2t^3} \\
&= \lim_{t\to 0^+}\frac{\left(2+2t-2t+t^2-2t^2+t^2+\frac{t^3}{3}-t^3+t^3+o(t^3)\right)-(2+o(t^3))}{2t^3} \\
&= \lim_{t\to 0^+}\frac{t^3+o(t^3)}{6t^3}=\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

□

注 5.7. 为什么说展开的阶数是至关重要的呢？因为展开阶数太少时,o 的阶数太小, 会导致最终无法求出结果. 例如, 在第 (2) 题里如果我们只把 e^t 展开到 2 阶, 则它对应的 o 为 $o(t^2)$, 那么对应在最后会转化成一项形如 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{*+o(t^2)}{2t^3}$ 的极限, 而根据 $o(t^2)$ 的定义,$\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{o(t^2)}{t^3}$ 的值是不确定的, 因此只展开到 2 阶时就无法求出极限值了; 而展开阶数太多时, 那些多出来的项最终也会并入 o 里面, 所以展开次数太多是没必要的. 在做这类问题的时候, 可以通过观察分子分母的 x 的次数判断展开到几阶比较合适.

例 5.8. 设 $f(x)$ 在点 a 的某邻域 $(a-\delta,a+\delta)$ 内二阶可导且 $f''(x)\neq 0$, 且有 $f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta h)h,\theta\in(0,1),h\in(-\delta,\delta)$. 证明 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$.

解. 由 $f(x)$ 在 a 处的泰勒展开:$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2+o(h^2)$, 以及

题目条件 (实际上是微分中值公式)$f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta h)h$, 比较二式可知

$$f'(a+\theta h)=f'(a)+\frac{f''(a)}{2}h+o(h)$$

又由条件可知 $f'(x)$ 在 $(a-\delta,a+\delta)$ 内一阶可导, 则考虑 $f'(x)$ 的泰勒展开:

$$f'(a+\theta h)=f'(a)+f''(a)\theta h+o(h)$$

再次比较得 $f''(a)\theta h=\frac{f''(a)}{2}h+o(h)$. 因为 $f''(a)\neq 0$, 所以

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}+\frac{1}{f''(a)}\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=\frac{1}{2}$$

□

注 5.8. 本题揭示了泰勒公式和微分中值公式的某种联系. 实际上本题结论可以推广为: 设 $f(x)$ 在点 a 的某邻域 $(a-\delta,a+\delta)$ 内 n 阶可导,$f^{(n+1)}(a)$ 存在且非零, 则在带有拉格朗日余项的泰勒公式

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n$$

中成立 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$. 证明思路和本例题的思路一致.

带拉格朗日余项的泰勒公式则常常用于证明一些不等式. 尤其是当条件或待证明的结论里**同时出现了一阶导数和二阶导数 (甚至更高阶的导数)** 的时候, 常常用到这一余项进行不等式放缩估计.

例 5.9. (P120.25) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数, 且满足 $f(1)=f(0)$ 及 $|f''(x)|\leq M(x\in[0,1])$. 证明: 对一切 $x\in[0,1]$, $|f'(x)|\leq\frac{M}{2}$.

解. 分析: 题目中涉及到了一阶导数和二阶导数的条件, 所以考虑使用泰勒公式将函数展开至二阶 (拉格朗日余项为二阶导数项). 根据题目里给出的 $f(1)=f(0)$ 的条件, 先尝试在 $x=0$ 和 $x=1$ 展开, 然后进行化简并分离出 $|f'(x)|$, 再结合二阶导数的条件证明. 面对这类问题, 我们经常需要多在一些可能有用的点处展开, 多尝试几次, 才能找到证明结论的办法.

证明: 对任意的 $x\in[0,1]$, 对 f 在 x 点进行泰勒展开后分别代入 0 和 1 有

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(0-x)^2$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2$$

由 $f(0)=f(1)$ 可知,$f(1)-f(0)=f'(x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2-\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2=0$, 从而 $|f(x)|=\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2\right|\leq\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2\right|+\left|\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2\right|$.

又因为对任意 $x \in [0,1]$ 有 $|f''(x)| \leq M$, 则有

$$|f'(x)| \leq \frac{Mx^2}{2} + \frac{M(1-x)^2}{2} = \frac{M(2x^2-2x+1)}{2}$$

对 $g(x) = 2x^2 - 2x + 1$,$g'(x) = 4x - 2$, $g'(x) = 0$ 时 $x = \frac{1}{2}$, 且 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时 $g'(x) < 0$, $\frac{1}{2} < x < 1$ 时 $g'(x) > 0$, 则在 $[0,1]$ 上 $g(x)$ 先减后增. 则对 $x \in [0,1]$, 有 $g(x) \leq 1$ 始终成立, 从而 $|f'(x)| \leq \frac{Mg(x)}{2} \leq \frac{M}{2}$ 成立, 证毕. □

例 5.10. (P120.26) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)f(b) < 0$ 及 $f'(c) = 0, a < c < b$ 证明：当 $f(c) > 0$ 时，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $f''(\xi) < 0$.

解. 分析: 本题中函数二阶可导, 因此保证了函数可以展开成二阶泰勒公式. 又由条件 $f'(c) = 0$ 可以想到, 若对函数在 $x = c$ 处展开, 那么这个展开式里面的一次项直接就消失了, 再加上 0 次项有 $f(c) > 0$ 的保证, 可以预见函数在 $x = c$ 处的展开式将会有很好的性质. 此外, 题目还给出了关于 $f(a), f(b)$, 因此在把函数在点 $x = c$ 展开后, 可以在展开式里分别代入 $x = a$ 和 $x = b$, 进而探索得到的式子能否用于证明我们的结论.

证明: 将 $f(x)$ 在 $x = c$ 处做泰勒展开, 然后分别在展开式里代入 $x = a$ 和 $x = b$:

$$f(a) = f(c) + f'(c)(c-a) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(c-a)^2 = f(c) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(c-a)^2, a < \xi_1 < c.$$

$$f(b) = f(c) + f'(c)(c-b) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(c-b)^2 = f(c) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(c-b)^2, c < \xi_2 < b.$$

由于 $f(a)f(b) < 0$, 则二者异号.

若 $f(a) < 0, f(b) > 0$, 则此时有 $f''(\xi_1) = \frac{2(f(a)-f(c))}{(c-a)^2}$. 又由于 $f(c) > 0$, 则此时 $f(a) - f(c) < 0$, 有 $f''(\xi_1) < 0$ 成立. 此时取 $\xi = \xi_1$ 即可.

若 $f(a) > 0, f(b) < 0$, 则此时有 $f''(\xi_2) = \frac{2(f(b)-f(c))}{(c-b)^2}$. 又由于 $f(c) > 0$, 则此时 $f(b) - f(c) < 0$, 有 $f''(\xi_2) < 0$ 成立. 此时取 $\xi = \xi_2$ 即可. □

例 5.11. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数,$f'(a) = f'(b) = 0$, 证明 $\exists \xi \in (a,b)$, 使得 $|f''(\xi)| \geq \dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|$.

解. 分析: 因为 $f'(a) = f'(b) = 0$, 所以若选在 a 和 b 处展开, 则展开式中 $f'(x)(x-x_0)$ 一项就为 0, 可能会给解题带来便利. 由为了凑出题目中需要的 $(b-a)$, 考虑取点 $x_0 = \frac{a+b}{2}$, 就会有 $x_0 - a = \frac{b-a}{2}, b - x_0 = \frac{b-a}{2}$. 像这些取点的思路技巧都是值得学习的.

证明: 将 $f(x)$ 分别在 $x=a$ 和 b 处展开, 并代入 $x=\frac{a+b}{2}$. 由 $f'(a)=f'(b)=0$ 得:

$$f(\frac{a+b}{2})=f(a)+\frac{1}{2}f''(\eta_1)(\frac{b-a}{2})^2 f(\frac{a+b}{2})=f(b)+\frac{1}{2}f''(\eta_2)(\frac{b-a}{2})^2$$

其中 $a<\eta_1<\frac{a+b}{2}<\eta_2<b$. 两式相减得:$f(b)-f(a)+\frac{1}{8}[f''(\eta_2)-f''(\eta_1)](b-a)^2=0$, 故

$$\frac{4|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}\leq\frac{1}{2}(|f''(\eta_1)|+|f''(\eta_2)|)\leq|f''(\xi)|$$

其中取 $|f''(\xi)|=\max\{|f''(\eta_1)|,|f''(\eta_2)|\}$. 这就证明了结论. □

例 5.12. (用泰勒公式求高阶导数) 设 $f(x)=x^2\sin x$, 求 $f^{(99)}(0)$.

解. 由于 $x\to 0$ 时有 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$, 则 $x\to 0$ 时对 $f(x)$ 有

$$f(x)=x^2\sin x=x^3-\frac{x^5}{3!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n+2})$$

要考虑 $f^{(99)}(0)$, 只需考虑 $f(x)$ 展开式中 x^{99} 项的系数, 此时对应 $n=49$, 则其系数为 $\frac{1}{97!}$, 则 $f^{(99)}(0)=99!\times\frac{1}{97!}=99\times 98=9702$. □

注 5.9. 一般来说, 求某个函数在特定点 $x=x_0$ 处的高阶导数, 如果函数在该点处的泰勒公式比较容易计算 (一般可以直接套用现成的那些初等函数的泰勒公式), 则可以考虑用泰勒公式的系数来求函数在该点的高阶导数. 例如本题中的函数是一个“多项式 $\times$ 初等函数”的形式, 因此套用 $\sin x$ 的泰勒公式即可.

5.4 用微分学研究一元函数的性质

一元函数的性质有单调性、极值点性质以及凹向性等主要性质是可以利用微分学定理来研究的. 我们在这里回顾教材上的一些重要定理.

定理 5.9. (极值第一判别法) 设 f 在点 x_0 连续, 在某邻域 $U^\circ(x_0;\delta)$ 内可导.
(1) 若当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时 $f'(x)\leqslant 0$, 当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时 $f'(x)\geqslant 0$, 则 f 在点 x_0 取得极小值.
(2) 若当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时 $f'(x)\geqslant 0$, 当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时 $f'(x)\leqslant 0$, 则 f 在点 x_0 取得极大值.

定理 5.10. (极值第二判别法) 设 f 在 x_0 的某邻域 $U(x_0;\delta)$ 内一阶可导, 在 $x=x_0$ 处二阶可导, 且 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$.

(1) 若 $f''(x_0)<0$, 则 f 在 x_0 取得极大值.
(2) 若 $f''(x_0)>0$, 则 f 在 x_0 取得极小值.

注意, 上述两个都只是判断极值的充分条件而不是必要条件.

定义 5.1. 如果在区间 (a,b) 内的任意点 x_0 处, 曲线 f 的切线均在曲线之下, 即在 x_0 某个邻域内总有 $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\le f(x)$, 则称曲线 f 在 (a,b) 内向**上凹**; 如果在区间 (a,b) 内的任意点 x_0 处, 曲线 f 的切线均在曲线之上, 即在 x_0 某个邻域内总有 $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\ge f(x)$, 则称曲线 f 在 (a,b) 内向**下凹**.

定理 5.11. (凹向判别法) 设 f 在区间 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 二阶可导, 则
(1) 曲线 f 在 $[a,b]$ 向上凹当且仅当在 (a,b) 内恒有 $f''\ge 0$. (1) 曲线 f 在 $[a,b]$ 向下凹当且仅当在 (a,b) 内恒有 $f''\le 0$.

定理 5.12. 设 f 在区间 (a,b) 上二阶可导,$(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 是拐点, 则有 $f''(x_0)=0$.

其他诸如函数的渐近线、函数图像绘制和曲率等内容就不在这里叙述了, 请大家参照课本.

例 5.13. (1) 证明不等式: $\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln(1-x)}<1(x<1,x\neq 0)$;
(2) 利用函数的最值证明如下不等式:$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2},x>0$.

解. (1)$\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln(1-x)}=\frac{\ln(1-x)+x}{x\ln(1-x)}$, 且 $0<x<1$ 时 $\ln(1-x)<0$, 有 $x\ln(1-x)<0$;$x<0$ 时 $\ln(1-x)>0$, 有 $x\ln(1-x)<0$. 因此要证 $\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln(1-x)}<1$, 即证明 $x+\ln(1-x)>x\ln(1-x)$.

令 $g(x)=x+\ln(1-x)-x\ln(1-x),x<1$, 则 $g'(x)=1+\frac{-1}{1-x}-\ln(1-x)-x\cdot\frac{-1}{1-x}=-\ln(1-x)$, 则 $0<x<1$ 时 $g'(x)>0,x<0$ 时 $g'(x)<0$. 从而 $g(x)$ 在 $x=0$ 处取极小值也取最小值, 且 $g(0)=0$. 因此 $x<1,x\neq 0$ 时有 $g(x)=x+\ln(1-x)-x\ln(1-x)>g(0)=0$ 成立, 即 $x<1,x\neq 0$ 时有 $\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln(1-x)}<1$ 成立.
(2) 令 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2},x\ge 0$. 则

$$\begin{aligned}f'(x)=&\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\cdot\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\\&=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\\&=\ln(x+\sqrt{1+x^2}),\end{aligned}$$

而 $x>0$ 时 $\sqrt{1+x^2}>1$, 此时有 $f'(x)>0$ 恒成立，则 $f(x)$ 为严格单调增，则 $x>0$ 时 $f(x)>f(0)=1+0-1=0$ 成立，即原不等式成立.

□

例 5.14. (P122.44) 利用曲线的凹向证明不等式:$e^{\frac{x+y}{2}}<\dfrac{e^x+e^y}{2}(x\neq y)$.

解. 分析: 与函数凹向有关的问题常常要借用上凹和下凹的定义来构造不等式.
解: 令 $f(x)=e^x$, 则有 $f'(x)=f''(x)=e^x>0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 是严格向上凹函数. 因此对任意 x_0, 当 $x\neq x_0$ 时 , $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)<f(x)$ 成立.

对任意 x,y 且 $x\neq y$, 令 $x_0=\frac{x+y}{2}$, 由上凹的定义有

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=f(x_0)+\frac{x-y}{2}f'(x_0)<f(x)$$

$$f(x_0)+f'(x_0)(y-x_0)=f(x_0)+\frac{y-x}{2}f'(x_0)<f(y)$$

两个不等式相加则有 $2f(x_0)=2e^{\frac{x+y}{2}}<f(x)+f(y)=e^x+e^y$ 成立, 从而不等式 $e^{\frac{x+y}{2}}<\frac{e^x+e^y}{2}$ 在 $x\neq y$ 时成立. □

例 5.15. (P123.52) 过正弦曲线 $y=\sin x$ 上点 $M\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 处作一抛物线 $y=ax^2+bx+c$, 使得抛物线与正弦曲线在点 M 处有相同的曲率与凹向，并求 M 点处两曲线的公共曲率圆方程.

解. 对 $y=\sin x, y'=\cos x, y''=-\sin x$, 有 $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, y''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$. 从而点 M 处的曲率 $k=\frac{\left|y''\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|}{\left(1+y'\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=1$.

根据题意, 该抛物线的顶点位于 $M\left(\frac{\pi}{2},1\right)$, 因此可以重设抛物线方程为 $f(x)=a(x-\frac{\pi}{2})^2+1$, 则 $f'(\frac{\pi}{2})=0, f''(\frac{\pi}{2})=2a$. 所以抛物线在 M 点的曲率为 $|2a|=k=1$. 又由于在 M 点处两曲线凹向相同, 故两曲线在 M 点的二阶导数符号应相同, 因此解得 $a=-\frac{1}{2}$. 所以抛物线方程为

$$f(x)=-\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2+1=-\frac{1}{2}x^2+\frac{\pi}{2}x+1-\frac{\pi^2}{8}.$$

而对曲率圆圆心有 $\begin{cases} x=\frac{\pi}{2}-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=\frac{\pi}{2}, \\ y=1+\frac{1+y'^2}{y''}=0, \end{cases}$, 即圆心为 $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$, 且曲率圆半径为 1.
则曲率圆方程为 $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+y^2=1$. □

第 6 章　不定积分

(若无特别说明, 本章中 C 均表示任意常数)

6.1　不定积分的定义与常用公式

定义 6.1. 设函数 f 与 F 在区间 I 上都有定义. 若 $F'(x)=f(x), x\in I$, 则称 F 为 f 在区间 I 上的一个**原函数**. 函数 f 在区间 I 上的全体原函数称为 f 在 I 上的**不定积分**, 记作

$$\int f(x)dx$$

求函数的不定积分可以看成是求函数的微分的逆运算. 不过要注意, 一个函数的不定积分不是另一个函数, 而是一族函数, 这族函数之间互相相差一个常数 C. 因此, 在求函数的不定积分时, 要记得在结果里面加上常数 C. 此外, 有时候用不同方法求同一个函数的不定积分可能会求出“不同”的结果, 这往往是因为这些结果之间相差了一个常数, 它们本质上还是一样的结果.

下面列举了一些常见函数的不定积分:

1. $\int 0\mathrm{d}x=C.$
2. $\int 1\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}x \ = \ x+C.$
3. $\int x^a\mathrm{d}x=\frac{x^{a+1}}{\alpha+1}+C(a\neq -1, x>0).$
4. $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C(x\neq 0).$
5. $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C.$
6. $\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\mathrm{ln}a}+C\ (a>0, a\neq 1).$
7. $\int \cos ax\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\sin ax+C(a\neq 0).$
8. $\int \sin ax\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\cos ax+C\ (a\neq 0)\,.$
9. $\int \sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C.$
10. $\int \csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C.$
11. $\int \sec x\cdot\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C.$
12. $\int \csc x\cdot\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C.$
13. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C.$
14. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x+C.$
15. $\int \csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C,\ \int \sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C.$

如果函数是分段函数, 那么在对这一函数求不定积分时, 首先要对每一段函数求不定积分, 然后根据不定积分的连续条件, 可以得知在分段点上不定积分应当是连续的, 所以相邻两段上求出来的不定积分的两个常数之间是存在关联的. 例如下面这个例子:

例 6.1. (P148.4) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2, & x \le 0, \\ \cos x - 3e^x, & x > 0, \end{cases}$ 求不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

解. $x \le 0$ 时,$\int f(x)\mathrm{d}x = \int (x^3-2)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 - 2x + C_1, C_1$ 为任意常数; $x > 0$ 时 $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (\cos x - 3e^x)\mathrm{d}x = \sin x - 3e^x + C_2, C_2$ 为任意常数.

因为 $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$ 在 $x = 0$ 处可导, 则必在 $x = 0$ 处连续, 则应有 $\lim_{x\to 0^-} F(x) = \lim_{x\to 0^+} F(x)$ 成立. 又

$\lim\limits_{x\to 0^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{4}x^4 - 2x + C_1 = C_1, \lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sin x - 3e^x + C_2 = 0 - 3e^0 + C_2 = C_2 - 3$

则有 $C_1 = C_2 - 3$. 综上可得 ,$\int f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{4}x^4 - 2x + C_2 - 3, & x \le 0, \\ \sin x - 3e^x + C_2, & x > 0, \end{cases}$ 其中 C_2 为任意常数. □

6.2 换元积分法与分部积分法

定理 6.1. 设 $g(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有定义,$u = \varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $\alpha \leqslant \varphi(x) \leqslant \beta, x \in [a, b]$, 并记 $f(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x), x \in [a, b]$.
(1)(第一换元积分法) 若 $g(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上存在原函数 $G(u)$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上也存在原函数 $F(x), F(x) = G(\varphi(x)) + C$, 即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int g(u)\mathrm{d}u = G(u) + C = G(\varphi(x)) + C.$$

(2)(第二换元积分法) 又若 $\varphi'(x) \ne 0, x \in [a, b]$, 则上述命题 (1) 可逆, 即当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在原函数 $F(x)$ 时,$g(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上也存在原函数 $G(u)$, $G(u) = F(\varphi^{-1}(u)) + C$, 即

$$\int g(u)\mathrm{d}u = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C = F(\varphi^{-1}(u)) + C.$$

在第二类换元法中, 有一种特殊且常见的换元就是三角换元. 一般地, 若被积函数中出现了 $a^2 - x^2$, 往往可以考虑换元 $x = a\sin t$; 若被积函数中出现了

x^2-a^2, 往往可以考虑换元 $x=a\sec t$; 若被积函数中出现了 x^2+a^2, 往往可以考虑换元 $x=a\tan t$.

请注意, 当进行换元后, 被积函数里面的所有原变量都要用新变量来表示, 而不能将新变量与原变量混着用, 这是因为做了换元后原变量就需要看成新变量的函数了. 此外还要注意, 做变量换元之后, 在最后的结果中不要忘记回代成原变量的表达结果!

定理 6.2. (分部积分法) 若 $u(x)$ 与 $v(x)$ 可导, 不定积分 $\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ 存在, 则 $\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ 也存在, 并有

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x \;=\; u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

分部积分法其实就是从函数乘积的导数公式 $(uv)'=u'v+v'u$ 得到的.

换元积分法和分部积分法往往是要结合起来使用的, 有了它们, 我们就能够计算更多复杂的不定积分.

例 6.2. 计算下列不定积分:
(1)$\int x\sin x dx$ (2)$\int e^{2x}\cos e^x dx$

解. (1)

$$\begin{aligned}\int x\sin xdx &= -\int xd\cos x = -x\cos x+\int \cos xdx\\ &= -x\cos x+\sin x+C\end{aligned}$$

(2) 令 $t=e^x$, 则

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\cos e^x dx &= \int t\cos tdt = \int td\sin t = t\sin t-\int \sin tdt\\ &= t\sin t+\cos t+C = e^x\sin e^x+\cos e^x+C\end{aligned}$$

□

例 6.3. (P148.8) 用换元积分法计算下列不定积分:
(1)$\int \dfrac{1}{x^2-2x+5}dx$ (2)$\int \dfrac{dx}{1+\cos x}$ (3)$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$
(4)$\int \dfrac{\sin^3 xdx}{2+\cos x}$ (5)$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

解. 分析: 换元积分法的核心思想就是将被积函数里面难处理的部分做变量替换, 变成我们容易计算的样子. 回忆之前我们列举的那些常用的不定积分, 会发现这

些一大类是关于多项式 (或者分子分母都是多项式的分式) 的不定积分, 一大类是关于三角函数 (三角函数组成的多项式) 的不定积分. 因此当我们要用换元积分法时, 我们要做一个合适的变量替换, 使得原来的被积函数在做替换后可以在形式上尽可能地往前面这两大类我们已经能算的不定积分上靠. 这就是换元的一大原则.

解:(1)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(x-1)^2+4}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}(2t+1) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t \quad (t=\frac{x-1}{2}) \\ &= \frac{1}{2}\arctan t + C = \frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{2} + C.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int \sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x \\ &= \int \sec^2 t\mathrm{d}t = \tan t + C = \tan\frac{x}{2} + C. \quad (t=\frac{x}{2})\end{aligned}$$

(3) 法 1: 做变量代换 $t=\sqrt{x}$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{\mathrm{d}t^2}{t\sqrt{1-t^2}} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = 2\arcsin t + C = 2\arcsin\sqrt{x} + C.$$

法 2: 注意到 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} = \int \frac{2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}$, 因此令 $t=2x-1$ 得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin(2x-1) + C.$$

(4)

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^3 x\mathrm{d}x}{2+\cos x} &= \int \frac{\sin^2 x\sin x\mathrm{d}x}{2+\cos x} = -\int \frac{1-\cos^2 x}{2+\cos x}\mathrm{d}\cos x = -\int \frac{1-t^2}{2+t}\mathrm{d}t \quad (t=\cos x) \\ &= \int \frac{t^2-1}{t+2}\mathrm{d}t = \int \frac{(u-2)^2-1}{u}\mathrm{d}(u-2) = \int \frac{u^2-4u+3}{u}\mathrm{d}u \quad (u=t+2) \\ &= \int u\mathrm{d}u - \int 4\mathrm{d}u + \int \frac{3}{u}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2 + 3\ln|u| - 4u + C \\ &= \frac{1}{2}(\cos x+2)^2 + 3\ln(\cos x+2) - 4(\cos x+2) + C \\ &= \frac{1}{2}\cos^2 x - 2\cos x + 3\ln(\cos x+2) + C_0.\end{aligned}$$

这里 $C_0 = C-6$ 也为任意常数.

(5)

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}} &= \int \frac{\mathrm{d}\tan\alpha}{(2\tan^2\alpha+1)\sec\alpha} = \int \frac{\mathrm{d}\alpha}{\cos\alpha(2\tan^2\alpha+1)} \quad (x=\tan\alpha)\\ &= \int \frac{\cos\alpha \mathrm{d}\alpha}{2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \int \frac{\mathrm{d}\sin\alpha}{\sin^2\alpha+1} = \arctan(\sin\alpha)+C.\end{aligned}$$

在上述换元过程中, 由于 x 原本是可以取到任何实数的, 因此我们只要找一个合适的 α 的区间, 使得 $\tan\alpha$ 可以取到任意实数即可. 此处不妨取 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. 则由 $\tan\alpha = x$ 可知 $\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, 从而有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \arctan\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

□

注 6.1. 注意, 因为第二类换元法中涉及到反函数的问题, 因此换元时需要保证相应的反函数存在. 例如在第 (1) 问中, 令 $t=(x-1)^2$ 的换元就是不恰当的, 因为 $\varphi(x)=(x-1)^2$ 不是单调函数, 它在它的定义域上不存在反函数.

例 6.4. (P149.10) 用分部积分法求下列不定积分:

(1)$\int x^3e^{-x^2}dx$ (2)$\int \sqrt{x}\ln^2 xdx$ (3)$\int \sin x\ln\tan xdx$

(4)$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$ (5)$\int \frac{x^2}{(4+x^2)^2}dx$ (6)$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

解. 分析: 分部积分法往往是和换元积分法一起用的. 有时候做完换元后, 发现积分仍然看不出来应该怎么计算, 这时候就可能要用一次分部积分, 把被积函数换成另一个函数, 可能就能计算出来了. 使用分部积分法会碰到如下常见的问题: 对于 $\int u'(x)v'(x)dx$, 是应该凑成 $\int u'dv$, 还是应该凑成 $\int v'du$? 通常情况下, 我们要选择能够简化被积函数的那种方式, 比如尽可能地降次、消掉复杂不易积分的函数等.

解:(1) 首先可以做一次换元 $t=-x^2$, 其次考虑到应该逐次降低 x^3 的次数, 因此应该把 e^{-x^2} 凑进 dx 里面做分部积分:

$$\begin{aligned}\int x^3e^{-x^2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int x^2e^{-x^2}\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}\int -te^t\mathrm{d}(-t) = \frac{1}{2}\int te^t\mathrm{d}t \quad (t=-x^2)\\ &= \frac{1}{2}\int t\mathrm{d}e^t = \frac{1}{2}\left(te^t - \int e^t\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2}(te^t-e^t)+C\\ &= \frac{1}{2}(-x^2-1)e^{-x^2}+C = -\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}+C.\end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{x}\ln^2 x\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}\int \ln^2 x\mathrm{d}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x - \frac{2}{3}\int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\ln^2 x \\
&= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x - \frac{4}{3}\int \sqrt{x}\ln x\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x - \frac{8}{9}\int \ln x\mathrm{d}x^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x - \frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}}\ln x + \frac{8}{9}\int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\ln x \\
&= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x - \frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}}\ln x + \frac{8}{9}\int \sqrt{x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x - \frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}}\ln x + \frac{16}{27}x^{\frac{3}{2}} + C.
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\int \sin x\ln\tan x\mathrm{d}x &= -\int \ln\tan x\mathrm{d}\cos x = -\cos x\ln\tan x + \int \cos x\mathrm{d}\ln\tan x \\
&= -\cos x\ln\tan x + \int \cos x\cdot\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= -\cos x\ln\tan x + \int \csc x\mathrm{d}x \\
&= -\cos x\ln\tan x + \ln|\csc x - \cot x| + C.
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x &= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int x\mathrm{d}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \\
&= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int x\cdot\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \\
&= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \\
&= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}(1+x^2) \\
&= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(4+x^2)^2}\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}\frac{1}{4+x^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{4+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{4+x^2} + \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}\frac{x}{2} \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{4+x^2} + \frac{1}{4}\arctan\frac{x}{2} + C.
\end{aligned}
$$

(6) 令 $x=\tan t$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx &= \int \frac{e^t\tan t}{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}\cdot\sec^2 tdt = \int e^t\sin tdt\\ &= \frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+C\\ &= \frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C\end{aligned}$$

□

注 6.2. 在第 (1) 问中, 当做到 $\int te^t\mathrm{d}t$ 后, 如果选择把 t 放进 dt 里面而不是把 e^t 放入 dt, 则得到

$$\int te^t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t^2e^t-\frac{1}{2}\int t^2e^t\mathrm{d}t$$

反而将被积函数变得更复杂了 (t 变成了 t^2, 次数升高了). 因此在使用分部积分时, 应该尽可能简化被积函数, 如做到降次或者除掉复杂函数. 像第 (2) 问实际上也是用分部积分不断第降低 $\ln x$ 的次数, 达到化简被积函数的目的.

另外像第 (4) 问这类问题, 被积函数直接积分不好计算, 但它的导数是容易算的, 所以使用一次分部积分后, 就能把求 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的不定积分变成求 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的微分, 这样就转化成了另一个更简单的被积函数. 像求 $\ln x$ 的不定积分也是这样, 之所以用分部积分来算也是因为 $\ln x$ 的不定积分很难直接计算, 但是它的导数是容易计算的. 这也是要使用分部积分法的常见类型.

6.3 某些特定类型不定积分的一些计算技巧

面对庞大的函数群体, 要记住所有函数的不定积分是一件不可能的事情. 因此面对陌生的函数, 要求它的不定积分, 就要想办法转化成我们已知的、熟悉的函数的不定积分 (这就是数学中的化归思想的体现). 所以首先我们需要确定可以作为模版或结论的积分公式或类型, 然后在面对新的函数时, 将它们通过换元法、分部积分法等方法转化到这些已知的积分公式或类型上面, 就可以解决了. 在这里我们介绍几种很常见的不定积分类型, 这些类型的计算方法可以作为已知的模板或结论记住, 以后遇见的大多数不定积分都可以转化到包含以下几类的我们所熟悉的类型来做.

6.3.1 含三角函数的不定积分

我们通过下面这些例子来总结含三角函数的不定积分的常见做法.

例 6.5. (1)$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$ (2)$\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}(ab\neq 0)$
(3)$\int \cos 3x\cos 2xdx$ (4)$\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan xdx$ (5)$\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

解. (1) 令 $t=\tan\frac{x}{2}$, 则 $dx=\frac{2}{1+t^2}dt, \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\text{原式}=\int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}(1+\frac{1-t^2}{1+t^2})}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int \frac{1}{2}(t+2+\frac{1}{t})dt=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln|\tan\frac{x}{2}|+C$$

(2) 注意到

$$\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\int \frac{\sec^2 xdx}{a^2\tan^2 x+b^2}=\int \frac{d\tan x}{a^2\tan^2 x+b^2}$$

因此令 $t=\tan x$, 得

$$\text{原式}=\int \frac{dt}{a^2t^2+b^2}=\frac{1}{a}\int \frac{d(at)}{a^2t^2+b^2}=\frac{1}{ab}\arctan\frac{at}{b}+C=\frac{1}{ab}\arctan(\frac{a}{b}\tan x)+C$$

(3) 根据积化和差公式:$\cos 3x\cos 2x=\frac{1}{2}(\cos 5x+\cos x)$, 因此

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int(\cos 5x+\cos x)dx=\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{2}\sin x+C$$

(4) 令 $u=\arctan x$, 则 $x=\tan u, dx=\sec^2 udu$, 得

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int \frac{\tan^2 u}{1+\tan^2 u}\cdot u\sec^2 udu=\int u\tan^2 udu=\int u(\sec^2 u-1)du\\&=\int u\sec^2 udu-\frac{1}{2}u^2=\int ud\tan u-\frac{1}{2}u^2=u\tan u-\int \tan du-\frac{1}{2}u^2\\&=u\tan u+\ln|\cos u|-\frac{1}{2}u^2+C=x\arctan x+\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx&=\int \frac{\sin x+\cos x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int dx-\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx\\&=\int dx-\int \frac{\cos x-\sin x+\sin x}{\sin x+\cos x}dx\\&=\int dx-\int \frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}-\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx\end{aligned}$$

因此

$$\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}(x-\ln|\sin x+\cos x|)+C$$

□

注 6.3. 本例中的这些小题包含了处理含三角函数的不定积分的大部分的方法.
(1) 中使用的是三角函数的万能公式换元法, 它把三角函数的积分化为有理函数的积分, 有时可以降低积分的难度. 但要注意, 不是什么时候用这种方法都能把问题变简便的;
(2) 中这种出现了关于 $\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x, \cos x$ 等的有理式时可考虑化成 $\tan x$ 的函数, 同样也能将三角函数的积分转化成有理式的积分 (像这种转化成有理式积分的还可以用倍角公式等方法. 总之三角恒等变换公式在这里是非常有用的);
(3) 中这种两个 (甚至多个) 三角函数相乘的积分, 考虑积化和差公式化为几个单独的三角函数相加的积分, 会简单很多;
(4) 中三角函数与其他函数放在一起组成被积函数, 考虑换元法换掉复杂的部分, 之后与分部积分法一起使用;
(5) 含 $\sin x, \cos x$ 三角函数的积分由于其的特殊性 $((\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x)$, 因此进行几次分部积分后可能又会出现原积分式, 可利用这一点解题. 如用分部积分法求 $\int e^x \sin x dx$ 就是个典例. 又或者像这个题一样经过几次凑配可以变换回到原来的不定积分, 以此求出原来的不定积分.

例 6.6. 求 $\int \frac{\sin x}{x} dx$.

解. 事实上, 这个不定积分的结果已经被证明无法用初等函数表示, 所以不能“求出来”,~~但可以用来捉弄室友~~. 类似地, 不定积分“求不出来”的还有很多, 例如

$$\int e^{x^2} dx, \int \frac{dx}{\ln x}, \int \sqrt{1-k^2\sin^2 x} dx (0 < k^2 < 1)$$

□

6.3.2 含有理函数与某些无理根式的不定积分

对于形如 $\int \frac{\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + ... + \alpha_n}{\beta_0 x^m + \beta_1 x^{m-1} + \cdots + \beta_m} dx$ 的通用计算方法为:
(1) 记分母为 $Q(x)$, 分子为 $P(x)$, 分解 $Q(x)$ 为若干个一次因式和二次不可约因式之积;
(2) 根据书本定理 5.3.2, 分解写出每个因式所对应的部分分式:

$$\frac{A_1}{x-a}, \frac{A_2}{(x-a)^2}, \cdots, \frac{A_k}{(x-a)^k}, \frac{B_1 x + C_1}{x^2+px+q}, \cdots, \frac{B_k x + C_k}{(x^2+px+q)^k}$$

(3) 用待定系数法求出上述式子中的参数后, 再按照书本 P140 总结的结论做积分得到结果.

例 6.7. 求 $\int \dfrac{x^2+1}{(x^2-2x+2)^2}dx$.

解. 设有分解式 $\frac{x^2+1}{(x^2-2x+2)^2} = \frac{B_1x+C_1}{x^2-2x+2} + \frac{B_2x+C_2}{(x-2x+2)^2}$, 解得 $\frac{x+1}{(x-2x+2)^2} = \frac{1}{x-2x+2} + \frac{2x-1}{(x^2-2x+2)^2}$. 所以原式 $= \int \frac{1}{x^2-2x+2}dx + \int \frac{2x-1}{(x^2-2x+2)^2}dx$.
因为 $\int \frac{dx}{x^2-2x+2} = \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2+1} = \arctan(x-1)+C_1$

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-1}{(x^2-2x+2)^2}dx = \int \frac{(2x-2)+1}{(x^2-2x+2)^2}dx = \int \frac{d(x^2-2x+2)}{(x^2-2x+2)^2} + \int \frac{dx}{(x^2-2x+2)^2}\\ = -\frac{1}{x^2-2x+2} + \int \frac{d(x-1)}{[(x-1)^2+1]}\\ = \frac{x-3}{2(x^2-2x+2)} + \frac{1}{2}\arctan(x-1)+C_2\end{aligned}$$

所以

$$\text{原式} = \frac{x-3}{2(x^2-2x+2)} + \frac{3}{2}\arctan(x-1)+C$$

□

例 6.8. 计算不定积分 $\int \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\mathrm{d}x$.

解. 设

$$\begin{aligned}\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{A(x+1)(x-1)+B(x-1)+C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)}\\ &= \frac{(A+C)x^2+(B+2C)x+(-A-B+C)}{(x+1)^2(x-1)}.\end{aligned}$$

对比系数有 $\begin{cases} A+C=1, \\ B+2C=0, \\ -A-B+C=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} A=\dfrac{1}{2}, \\ B=-1, \\ C=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$ 所以

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| + \frac{1}{x+1} + C.\end{aligned}$$

□

对于含某些无理根式的不定积分, 有如下几种类型:
(1) 对于 $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ 型积分 $(ad-bc \neq 0)$, 令 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 即可化成有理函

数不定积分.

(2) 对于 $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 型积分 ($a>0$ 时 $b^2-4ac<0$,$a<0$ 时 $b^2-4ac>0$), 因为 $ax^2+bx+c=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$, 若记 $u=x+\frac{b}{2a},k^2=|\frac{4ac-b^2}{4a^2}|$, 则此二次三项式必为下述之一:

$$|a|(u^2+k^2),|a|(u^2-k^2),|a|(k^2-u^2)$$

则上述积分就可化为 $\int R(u,\sqrt{u^2\pm k^2})du$ 或 $\int R(u,\sqrt{k^2-u^2})du$ 的形式. 在上述三种情况中分别令 $u=k\tan t,u=k\sec t,u=k\sin t$, 就可转化为三角函数的不定积分, 用三角函数积分的技巧解决.

例 6.9. (1)$\int\dfrac{dx}{(1+x)\sqrt{2+x-x^2}}$ (2)$\int\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-3}}$

解. (1) 原式 $=\int\frac{1}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{2-x}}dx$.

令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{2-x}}$, 则有 $x=\frac{2t^2-1}{1+t^2},dx=\frac{6t}{(1+t^2)^2}dt$. 因此

$$\text{原式}=\int\frac{(1+t^2)^2}{9t^4}\cdot t\cdot\frac{6t}{(1+t^2)^2}dt=\int\frac{2}{3t^2}dt=-\frac{2}{3t}+C=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2-x}{1+x}}+C$$

(2)

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int\frac{dx}{x\sqrt{(x-1)^2-4}}=\int\frac{du}{(u+1)\sqrt{u^2-4}}\quad(x=u+1)\\&=\int\frac{2\sec\theta\tan\theta}{(2\sec\theta+1)\cdot2\tan\theta}d\theta\quad(u=2\sec\theta)\\&=\int\frac{d\theta}{2+\cos\theta}=\int\frac{2}{t^2+3}dt\quad(t=\tan\frac{\theta}{2})\\&=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{\theta}{2}\right)+C\end{aligned}$$

又因为

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\tan\theta}{\sec\theta+1}=\frac{\sqrt{(\frac{u}{2})^2-1}}{\frac{u}{2}+1}=\frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x+1}$$

所以

$$\text{原式}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{\sqrt{3}(x+1)}+C$$

□

第 7 章　定积分

7.1　定积分的定义与基本性质

引入定积分的一个动机是定积分可以用于求曲边梯形的面积. 这一求面积的过程可以归结为“分割、取点、作和、求极限”的过程 (具体可以参考书本 P151-152). 一般的定积分的定义也是用类似的思想来给出的:

定义 7.1. 设闭区间 $[a,b]$ 内有 $n-1$ 个点, 依次为

$$a \ = \ x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n \ = \ b\,,$$

它们把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]\,, i = 1, 2, \cdots, n$. 这些分点或这些闭子区间构成对 $[a,b]$ 的一个分割, 记为 $T = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ 或 $\{\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n\}$. 其中小区间 Δ_i 的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, 并记

$$\| \ T \ \| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \{\Delta x_i\}$$

称为分割 T 的模.

设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的一个函数,J 是一个确定的实数. 若对任给的正数 ε, 总存在某一正数 δ, 使得对 $[a,b]$ 的任何分割 T, 以及在其上任意选取的点集 $\{\xi_i\}$, 只要 $\| \ T \ \| < \delta$, 就有

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - J \right| < \varepsilon$$

则称函数 f 在区间 $[a,b]$ 上**可积或黎曼可积**; 数 J 称为 f 在 $[a,b]$ 上的**定积分或黎曼积分**, 记作

$$J = \int_a^b f(x)dx$$

其中,f 称为被积函数,x 称为积分变量,$[a,b]$ 称为积分区间,a,b 分别称为这个定积分的下限和上限.

由定积分的定义可以看到, 定积分也是用极限来定义的, 实际上有

$$J = \lim_{\|T\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

因此如果要从定义出发计算定积分, 就要从“定积分本质上也是一种极限”出发, 用“分割、取点、作和、求极限”的步骤来计算.

例 7.1. (1) 用定积分的定义计算 $\int_0^\pi \sin x dx$;
(2) 用定积分表示下列和式的极限:$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$.

解. 分析: 这两类问题都是在考查定积分的定义. 对于问题 (1), 只要对被积函数 (这里是 $\sin x$) 在给定的区间 (这里是 $[0,\pi]$) 上按照"分割、取点、作和、求极限"的步骤书写即可. 由于定积分的值与分割和取点的方法无关, 因此常常可以取最简单的分割方法, 即将区间进行 n 等分, 然后再取每个区间里的一个合适的点 (如都取每个区间的左端点或右端点), 然后再计算得到的极限就能求出定积分的值; 对于问题 (2), 则要考虑如何把这种形式的极限往定积分的定义上靠. 利用求和记号可以得到这一极限可以写成 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}$, 再对比定积分的定义形式可以推出这一极限对应的定积分.
解:(1) 将区间 $[0,\pi]$ 分割成 n 等分, 取 ξ_i 为每个小区间的右端点 $, i=1,2,\cdots,n$. 则 $\xi_i=\frac{i\pi}{n}$. 从而利用积化和差公式以及重要极限可以得到

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi i}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{i\pi}{n}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{i\pi}{n}-\frac{\pi}{n}\right)-\cos\left(\frac{i\pi}{n}+\frac{\pi}{n}\right)\right)\\ &=1\cdot\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{(i-1)\pi}{n}-\cos\frac{(i+1)\pi}{n}\\ &=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\cos 0+\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{n\pi}{n}-\cos\frac{(n+1)\pi}{n}\right)\\ &=\frac{1}{2}(1+1-\cos\pi-\cos\pi)=\frac{1}{2}\times 4=2.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\pi\frac{i}{n}\end{aligned}$$

观察上面的表达式, 求和项有 n 项, 且前面的系数为 $\frac{1}{n}$, 因此可以得知这是在区间 $[0,1]$ 上做的分割. 而 $\frac{i}{n}$ 应当对应被积函数的变量, 因此从 $\sin\pi\frac{i}{n}$ 可知被积函数应该是 $\sin\pi x$, 故对应的定积分就是 $\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x$. □

注 7.1. 上面的问题 (2) 的方法常常用于求解一类以求和号的方式给出的极限:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})$. 这类极限使用夹逼定理往往很难计算, 而需要借助定积分的

定义来计算. 事实上根据定积分的定义可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)dx$$

例 7.2. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1^2}+\frac{n+2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n^2}\right)$.

解. 分析：尝试对每一项提取一个 $\frac{1}{n}$ 后, 会发现原来的和式可以重新改写成 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1+\frac{i}{n}}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$, 即第 i 个单项是关于 $\frac{i}{n}$ 的一个式子, 因此这一极限与定积分的定义是一致的, 它可以转化成定积分来计算. 实际上, 有一大类求和类型或者能转化为求和类型的极限都需要定积分的定义来计算, 有时还要先进行放缩, 然后对放缩的结果使用定积分的定义计算, 再用夹逼定理计算原来的极限.

解:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1^2}+\frac{n+2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n^2}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n+i}{n^2+i^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1+\frac{i}{n}}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\\
&=\int_0^1\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\
&=\arctan x\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2)\\
&=\arctan 1-\arctan 0+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1\\
&=\frac{\pi}{4}-0+\frac{1}{2}[\ln(1+1^2)-\ln 1]=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.
\end{aligned}$$

□

从前面的讨论中, 我们发现直接从定义出发去研究定积分是非常繁琐的, 因此我们需要寻找定积分的更多性质, 帮助我们更好更快地用定积分解决问题. 定积分存在如下这些基本性质:

定理 7.1. (定积分的基本性质)

(1) 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积;

(2) 若有界函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上最多只有有限个间断点, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积;

(3) 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积;

(4) 假设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 (这里 k 为实常数)

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ ;\ \int_a^b[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

(5) 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $\forall c \in [a,b]$, 有

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

(6) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $f(x) \geqslant 0$, 则 $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$;

若 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $\forall x \in [a,b]$, 有 $f(x) \geqslant g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$;

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$;

(7) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $m \leq f(x) \leq M$, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

定理 7.2. (1)(定积分中值定理) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

(2)(推广的定积分中值定理) 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号, 则存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

例 7.3. 证明不等式 $\frac{1}{3} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x < \frac{\sqrt{3}}{4}$.

解. 分析: 由于不定积分 $\int \frac{\tan x}{x}dx$ 是不能初等表出的, 因此无法通过直接算出定积分的值来证明. 这里只能先对函数 $f(x) = \frac{\tan x}{x}, x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ 估计上下界, 然后再根据定积分的不等式性质来求证明.

证明: 令 $f(x) = \frac{\tan x}{x}, x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ 则

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot x - \tan x}{x^2} = \frac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x} = \frac{2x - \sin 2x}{2x^2\cos^2 x}.$$

由于在 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ 上 $2x > \sin 2x$, 从而此时 $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增. 又 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$, 从而 $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$ 时有 $\frac{4}{\pi} < \frac{\tan x}{x} < \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ 成立. 再使用定积分的不等式性质有

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{4}{\pi}\mathrm{d}x < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\mathrm{d}x$$

而 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{4}{\pi}\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi}{12} = \frac{1}{3}$, $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\mathrm{d}x = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\cdot\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.
因此就证明了

$$\frac{1}{3} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x < \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

□

例 7.4. (P198.7) 若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 则对任意连续函数 g, 等式 $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ 均成立, 证明: $f(x)=0, \forall x\in[a,b]$.

解. 分析: 由于题目条件说对任意连续函数 g 都有上述等式成立, 所以可以先考虑把 g 取成一些特殊的函数, 然后再看能推出 f 的哪些性质. 最开始可能会想是不是可以把 g 取成一个常值函数, 但此时仅从 $\int_a^b f(x)dx = 0$ 是无法推出 f 恒等于 0 的. 进一步考虑到, 因为题目里的 f 也是连续函数, 所以又会想到取 g 为 f 试一试, 会得到 $\int_a^b f^2(x)dx = 0$. 因为 $f^2(x)$ 为非负的, 所以根据定积分的不等式性质可以猜出只能是 $f^2(x)$ 恒为 0, 进而只能是 $f(x)$ 恒为 0.

为了严格证明这件事, 我们需要借助反证法. 如果存在一点 $x_0 \in [a,b]$ 使 $f^2(x_0) > 0$, 根据 f 连续可知一定存在 x_0 的某个小邻域,f 在这个邻域上也是正的. 考虑 $f^2(x)$ 在这部分邻域上面的积分符号, 就能推出矛盾了.
证明: 令 $g(x) = f(x)$, 则 $\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f^2(x)dx = 0$, 且 $f^2(x) \geq 0$ 始终成立. 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒为 0, 则 $\exists x_0 \in (a,b)$, 使得 $f^2(x_0) > 0$. 由于 $f^2(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $x_0-\delta < x < x_0+\delta$ 时,$f^2(x) > \frac{f^2(x_0)}{2}$, 且此时需满足 $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq [a,b]$. 因此有

$$\begin{aligned}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x &= \int_a^{x_0-\delta} f^2(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0+\delta}^{b} f^2(x)\mathrm{d}x \\ &\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x)\mathrm{d}x > \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f^2(x_0)}{2}\mathrm{d}x = f^2(x_0)\delta > 0.\end{aligned}$$

这与 $\int_a^b f^2(x)dx = 0$ 矛盾. 因此成立 $f(x) = 0, \forall x \in [a,b]$. □

例 7.5. (P198.9) 设 f 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(1) = 3\int_0^{\frac{1}{3}} xf(x)dx$. 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) = -\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

解. 由定积分中值定理,$\exists \eta \in \left(0,\frac{1}{3}\right)$, 使得 $f(1) = 3\int_0^{\frac{1}{3}} xf(x)dx = 3\left(\frac{1}{3}-0\right)\eta f(\eta) = \eta f(\eta)$. 令 $F(x) = xf(x)$, 则 $F(\eta) = F(1)$. 则由罗尔定理可知，$\exists \xi \in (\eta,1) \subset (0,1)$ 使得 $F'(\xi) = 0$. 又 $F'(x) = xf'(x) + f(x)$, 则有 $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$. 由 $\xi > 0$, 移项得 $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$ 成立.

综上，至少存在一点 $\xi \in (0,1)$ 使得 $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$.

□

例 7.6. 设 $f(n) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx, n \geqslant 1$, 证明:
(1)$f(n+1) \le f(n)$ (2)$f(n) + f(n+2) = \dfrac{1}{n+1}$
(3)$\dfrac{1}{n+1} \le 2f(n) \le \dfrac{1}{n-1}, n \ge 2$.

解. 解:(1) 在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上 $y = \tan x$ 满足 $0 \le \tan x \le 1$, 所以 $0 \le \tan^{n+1} x \le \tan^n x$. 又 $y = \tan x$ 在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 递增, 故由推广的积分中值定理,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot \tan^n x dx = \tan\xi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx, \xi \in (0, \frac{\pi}{4})$$

由 ξ 的范围知 $\tan\xi \in (0,1)$, 故 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1} x dx \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$, 即 $f(n+1) \leqslant f(n)$. (或者也可以直接利用定积分保不等式的性质证明)
(2)

$$\begin{aligned} f(n) + f(n+2) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^n x + \tan^{n+2} x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \left(1 + \tan^2 x\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \sec^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x d\tan x = \left.\frac{\tan^{n+1} x}{n+1}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

(3) 由 (1)(2) 知当 $n \ge 2$ 时 $f(n+2) \le f(n+1) \le f(n) \le f(n-1) \le f(n-2)$, 故

$$f(n+2) + f(n) \le 2f(n) \le f(n-2) + f(n)$$

即得 $\frac{1}{n+1} \le 2f(n) \le \frac{1}{n-1}, n \ge 2$. □

7.2 微积分基本公式

定义 7.2. 称 $F(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a,b]$ 为**变上限积分**, 若任取 $x \in [a,b]$, 该积分都存在.

如何理解变上限积分呢? 如果先从定积分的角度看, 它是一个定义在 $[a,x]$ 这个区间上的定积分, 这里 t 是它的积分变量; 但同时随着 x 值的改变, 这个定积分的值也会发生相应的改变, 因此这个积分值实际上可以看成是一个关于 x 的函数, 这就是为什么我们可以把它写成一个关于 x 的函数 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 的形式. 简而言之, 在变上限积分里面的 t 是积分变量,x 是函数变量. 求定积分的过程里要把 x 看做常数,t 看成变量, 而积分得到的结果则是以 x 为变量的函数.

定理 7.3. (微积分基本定理) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $F'(x)=f(x)$.

定理 7.4. (牛顿-莱布尼茨公式) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b)-F(a)$$

例 7.7. (1) 计算下面函数的导数:$\int_0^x (x^2-t^2)f(t)\mathrm{d}t$($f$ 为连续函数).

(2) 计算下面函数的导数:$F(x)=\int_0^x f(tx)\mathrm{d}t$($f$ 为连续函数).

(3) 计算 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{x^2} x\arctan\sqrt{t}\mathrm{d}t}{(e^{-x^2}-1)\ln(1-2x^2)}$.

解. (1) 注意, 此时这个变限积分整体是一个关于 x 的函数, 因此求导是对 x 求的. 由于现在被积函数里面含有 x, 则要先设法将 x 移到积分号外面 (因为对于这个定积分来说,x 视为一个常量), 然后再按照导数的四则运算法则计算导数.

对 $g(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f(t)\mathrm{d}t = x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x t^2 f(t)\mathrm{d}t$, 有

$$g'(x)=2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + x^2f(x)-x^2f(x)=2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

(2) 为了将 x 移到积分号外面, 首先令 $u=xt$, 则 $du=xdt$. 因此

$$F(x)=\int_0^x f(tx)dt=\int_0^{x^2} f(u)\frac{1}{x}du=\frac{1}{x}\int_0^{x^2} f(u)du$$

则 (这里积分变量写 u 还是 t 都无所谓, 因为定积分值与写什么积分变量记号无关)

$$F'(x)=\frac{1}{x}\cdot 2xf(x^2)-\frac{1}{x^2}\int_0^{x^2} f(t)dt = 2f(x^2)-\frac{1}{x^2}\int_0^{x^2} f(t)dt$$

(3) 按照洛必达法则计算即可, 但要注意分子求导前需要将被积函数里面的 x 提到积分号外面:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2} x\arctan\sqrt{t}\mathrm{d}t}{(e^{-x^2}-1)\ln(1-2x^2)} &= \lim_{x\to0^+}\frac{x\int_0^{x^2}\arctan\sqrt{t}\mathrm{d}t}{(-x^2)\cdot(-2x^2)} = \lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\arctan\sqrt{t}\mathrm{d}t}{2x^3} \\ &= \lim_{x\to0^+}\frac{2x\arctan\sqrt{x^2}}{6x^2} = \lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x}{3x}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

□

例 7.8. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且 $f(x)=\int_0^x e^{x-t}f(t)\mathrm{d}t+e^x$, 求 $f(x)$.

解. 分析: 由于 f 连续, 则根据 f 的表达式可见 f 也是可导的. 又因为 f 的表达式里面涉及到变上限积分, 直接想以此推出 f 是一件不容易的事情, 所以考虑先

对等式两边求导, 尝试消去这个麻烦的变上限积分. 求导后再用一次题目里给出的 f 的表达式, 就可以得到 $f'(x)=2f(x)$. 结合这个关系式以及题目中的隐含条件 $f(0)=0$, 就可以确定 f 了.

解: 由条件可得 $f(x)=\int_0^x e^{x-t}f(t)\mathrm{d}t+e^x=e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\mathrm{d}t+e^x$, 且 $f(0)=e^0=1$. 由于 f 连续，从而上式等号右端存在导函数，因此等式两边同时求导有

$$f'(x)=e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\mathrm{d}t+e^x\cdot e^{-x}f(x)+e^x=f(x)-e^x+f(x)+e^x=2f(x).$$

于是得到 $\frac{f'(x)}{f(x)}=2$, 则 $\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t=\int_0^x 2\mathrm{d}t=2x$, 因此有

$$\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}f(t)=\ln|f(x)|-\ln|f(0)|=\ln|f(x)|=2x.$$

从而 $|f(x)|=e^{2x}$, 又 $f(0)=1>0$, 则解得 $f(x)=e^{2x}$. □

例 7.9. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$. 证明：曲线 $F(x)=\displaystyle\int_a^b |x-t|\,f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上为向上凹的.

解. 分析: 因为 f 是连续的, 所以 $F(x)$ 应当具有较好的可微性, 所以可以考虑直接从它的二阶导数入手考虑这个问题. 这里的难点是怎么去掉积分号下的绝对值 $|x-t|$, 因为如果不去掉这一绝对值, 我们是无法直接计算 F 的导数的. 而这个绝对值的符号则取决于 x 与 t 的大小关系. 注意到这里的 t 是积分变量, 而 x 是积分结果这一函数 F 的函数变量, 所以在着眼于定积分时, 要先把 x 看成一个定值, 从而可以将原区间 $[a,b]$ 分成两个区间 $[a,x]$ 和 $[x,b]$, 在这两个区间上 $|x-t|$ 就可以分别被去掉了; 然后再把 x 看成是变量, 去考虑以 x 为变量的函数 $F(x)$ 的性质.

解: 将原区间 $[a,b]$ 分成两个区间 $[a,x]$ 和 $[x,b]$, 则在 $[a,x]$ 上 $|x-t|=x-t$, 在 $[x,b]$ 上 $|x-t|=t-x$:

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_a^b |x-t|\,f(t)\mathrm{d}t=\int_a^x (x-t)\,f(t)\mathrm{d}t+\int_x^b (t-x)\,f(t)\mathrm{d}t\\&=x\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t+\int_x^b tf(t)\mathrm{d}t-x\int_x^b f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

从而 $F(x)$ 在 (a,b) 内可导, 因此有

$$\begin{aligned}F'(x)&=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)+(-xf(x))-\left[\int_x^b f(t)\mathrm{d}t-xf(x)\right]\\&=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_x^b f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

从而 $F'(x)$ 在 (a,b) 内也可导，且 $F''(x)=f(x)-(-f(x))=2f(x)>0$. 因此曲线 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上为向上凹的.

□

7.3 定积分的常用计算方法

首先和不定积分类似, 定积分也有换元积分法与分部积分法. 不过定积分的换元积分法在求解过程的最后不需要再做变量的回代, 这是因为定积分的结果是一个确定的数, 它与变量的选取没有关系, 所以不论是用哪个变量求出来的结果都是一样的. 相应地, 在定积分的换元方法中, 每次做变量替换后都需要同时改变积分的上下限, 这是和不定积分的换元法不一样的地方.

定理 7.5. (定积分换元积分法) 若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续,φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可微, 且满足

$$\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b,a\leqslant\varphi(t)\leqslant b,t\in[\alpha,\beta],$$

则有定积分换元公式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

请注意, 定积分的换元积分法也需要考虑对应的反函数的存在性的问题. 如果发现换元会导致在积分区间上出现换元函数的反函数不存在的情况 (例如换元函数不单调), 则会导致错误的结果. 此时要么考虑另选换元方法, 要么考虑拆分积分区间使得在每段区间上函数分别单调.

定积分的分部积分法和不定积分的是差不多的, 就不再赘述了. 这里要介绍另一个计算定积分的常用技巧, 即定积分的对称性:

定理 7.6. (定积分的对称性) 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可积，则成立

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx,$$

上述定理有如下几个推论:

(1) 设函数 f 在区间 $[0,a]$ 上可积, 且有 $f(x)=f(a-x)$, 即关于区间的中点为偶函数 (也就是关于直线 $x=a/2$ 为偶函数), 则成立

$$\int_0^a f(x)dx=2\int_0^{a/2} f(x)dx.$$

(2) 设函数 f 在区间 $[0,a]$ 上可积, 且有 $f(x)=-f(a-x)$, 即关于区间的中点为奇函数, 则成立

$$\int_0^a f(x)dx=0.$$

(3) 设函数 f 在 $[0,a]$ 上可积，记 $f(x)+f(a-x)=g(x)$, 则成立

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^{\frac{a}{2}} g(x)dx.$$

上面这些结论均可以推广到一般的区间 $[a,b]$ 上.

特别地, 上述定理还告诉我们, 如果一个函数奇函数或偶函数, 那么这个函数在一个关于原点对称的区间 $[-a,a]$ 的积分至少可以转化为在半区间 $[0,a]$ 上的定积分:
(1) 若 $f(x)$ 为奇函数, 那么 $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$;
(2) 若 $f(x)$ 为偶函数, 那么 $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.
这两个结论在实际计算中非常有用.

先来看几个巧用对称性计算的例子.

例 7.10. 计算下列定积分:
(1)$\int_0^\pi \frac{\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}dx$; (2)$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$; (3)$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

解. (1) 令 $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}$, 注意到

$$f(\pi-x)=\frac{\cos(\pi-x)}{\sqrt{a^2\sin^2(\pi-x)+b^2\cos^2(\pi-x)}}=\frac{-\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}=-f(x)$$

因此根据前述推论 (2) 可知 $f(x)$ 关于区间的中点为奇函数原积分值为 0.
(2) 令 $f(x)=\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}$, 则

$$f(x)+f(\pi-x)=\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}+\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}=\frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}$$

因此根据前述推论 (3) 可知

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

(3) 记原积分为 I. 作代换 $x=\tan t,dx=\sec^2 tdt$ 得到

$$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t.$$

设 $f(t)=\ln(1+\tan t)$ 注意到

$$\begin{aligned}f(t)+f(\frac{\pi}{4}-t)&=\ln(1+\tan t)+\ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right]\\&=\ln(1+\tan t)+\ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)\\&=\ln(1+\tan t)+\ln\frac{2}{1+\tan t}=\ln 2\end{aligned}$$

因此根据前述推论 (3) 可知

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\ln 2dt=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

□

注 7.2. 可以看到在计算三角函数的定积分时常常能用到对称性简化计算, 这是由于三角函数具有很好的对称性质, 既有轴对称性 (关于对称轴是偶函数), 也有中心对称性 (关于对称中心是奇函数). 有时候在计算积分前, 可以先观察一下被积函数是否在积分区间上有某种对称性, 以此来尝试简化计算.

注 7.3. 对于定积分 $\int_a^b f(x)dx$, 如果想要尝试用对称性来解决这个问题, 那么首先可以尝试计算 $f(a+b-x)$, 看看是否成立 $f(a+b-x)=f(x)$(关于区间中点为偶函数) 或 $f(a+b-x)=-f(x)$(关于区间中点为奇函数); 如果都不是, 则考察 $g(x)=f(a+b-x)+f(x)$ 在半个区间上的积分 $\int_a^{\frac{a+b}{2}}g(x)dx$, 看看这个积分是不是比原积分好算. 如果前面几个都不行, 那么说明这个积分不适合使用对称性方法计算, 要另寻他法.

下面来看对称性方法、换元积分法和分部积分法是如何综合应用在定积分的计算中的.

例 7.11. (Wallis 公式) 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx, n\in\mathbb{Z}_+$.

解. 分析: 由于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的导数具有周期现象, 所以可以尝试使用分部积分. 在进行分部积分以及三角恒等变换后, 会发现得到了与 n 有关的一个递推公式. 因此根据递推公式可以求出原来的定积分.

解: 当 $n\geq 2$ 时,

$$\begin{aligned}J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x&=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x\\&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\mathrm{d}x-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x\\&=(n-1)J_{n-2}-(n-1)J_n\end{aligned}$$

所以 $J_n=\dfrac{n-1}{n}J_{n-2},n\geq 2$. 又因为 $J_0=\frac{\pi}{2},J_1=1$, 所以利用递推关系式可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, n\text{为偶数}\\ \frac{n!!}{(n+1)!!}, n\text{为奇数}\end{cases}$$

令 $x=\frac{\pi}{2}-t$, 得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos^n(\frac{\pi}{2}-t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$. □

注 7.4. (1) 在求三角函数有关的定积分时, 利用诱导公式可以实现被积函数的转化, 有时能够简化计算;

(2) 本例的两个积分的结果非常重要, 在很多计算积分的问题里会用到;

(3) 本例的结论还可以推出如下公式 (书本例 6.4.22):

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}$$

例 7.12. (1) 设 $f(x)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{k\pi}xf(|\sin x|)dx=\frac{k\pi}{2}\int_0^{k\pi}f(|\sin x|)dx, k\in\mathbb{Z}$;

(2) 设 $f(x)$ 为连续函数, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x,\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x,\sin x)dx$$

解. (1) 令 $t=k\pi-x$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^{k\pi}xf(|\sin x|)dx&=-\int_{k\pi}^0(k\pi-t)f(|\sin(k\pi-t)|)dt\\&=\int_0^{k\pi}k\pi f(|\sin t|)dt-\int_0^{k\pi}tf(|\sin t|)dt\end{aligned}$$

两边整理即得

$$\int_0^{k\pi}xf(|\sin x|)dx=\frac{k\pi}{2}\int_0^{k\pi}f(|\sin x|)dx.$$

(2) 令 $x=\frac{\pi}{2}-t$, 则左侧 $=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t,\sin t)(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos t,\sin t)dt$, 即得结论. □

注 7.5. 这两个结论有时可以用于处理一些三角函数的积分.

例 7.13. (P200.24) 计算下列定积分:

(1)$\int_0^{\pi}\left|x-\frac{\pi}{2}\right|\cos xdx$; (2)$\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$;

(3)$\int_0^a x^4\sqrt{a^2-x^2}dx$; (4)$\int_0^{n\pi}x\left|\sin x\right|dx$.

解. 分析: 计算定积分时, 如果有明显能够使用的对称性, 则优先考虑用对称性化简积分; 然后再用换元积分和分部积分等方法去计算, 这些计算和不定积分的计算基本上是一样的. 当然还要注意在定积分的计算里, 进行换元之后积分区间也会随之发生变化.

解:(1) 法 1(换元法): 令 $t=x-\frac{\pi}{2}$, 则

$$\int_0^\pi\left|x-\frac{\pi}{2}\right|\cos x\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|t|\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|t|\sin t\mathrm{d}t.$$

且对 $f(t)=|t|\sin t, f(-t)=|-t|\sin(-t)=-|t|\sin t=-f(t)$, 则 $f(t)=|t|\sin t$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上是奇函数, 因此有

$$\int_0^\pi\left|x-\frac{\pi}{2}\right|\cos x\mathrm{d}x=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|t|\sin t\mathrm{d}t=0.$$

法 2(直接使用对称性)：记 $f(x)=\left|x-\frac{\pi}{2}\right|\cos x$, 则

$$f(\pi-x)=\left|\pi-x-\frac{\pi}{2}\right|\cos(\pi-x)=-\left|x-\frac{\pi}{2}\right|\cos x=-f(x)$$

因此根据定理7.6的推论 (2),$f(x)$ 关于区间中点为奇函数, 原积分为 0.

(2) 法 1(直接分部积分计算):

$$\begin{aligned}\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\mathrm{d}x&=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\bigg|_0^3-\int_0^3x\mathrm{d}\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\\&=\pi-\int_0^3x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{x+1}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}}\cdot\frac{x+1-x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x\\&=\pi-\frac{1}{2}\int_0^3\frac{\sqrt{x}}{x+1}=\pi-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t^2\quad(t=\sqrt{x})\\&=\pi-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\pi-\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\\&=\pi-(t-\arctan t)\bigg|_0^{\sqrt{3}}=\pi-(\sqrt{3}-\arctan\sqrt{3}-0)\\&=\pi-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}.\end{aligned}$$

法 2(先整体换元): 令 $t=\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$, 则从积分区间知 $x\geq 0$, 于是 $x=\tan^2 t$.

因此有

$$\begin{aligned}\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} td(\tan^2 t)\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} t\cdot 2\tan t\cdot \sec^2 tdt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} td(\sec^2 t)\\ &= t\sec^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 tdt\\ &= \frac{4\pi}{3} - \tan t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.\end{aligned}$$

(3) 进行三角换元 $x = a\sin t$ 以及 Wallis 公式:

$$\begin{aligned}\int_0^a x^4\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4\sin^4 t\cdot a\cos t\mathrm{d}a\sin t\\ &= a^6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 t\mathrm{d}t = a^6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t\\ &= a^6\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t\mathrm{d}t\right)\\ &= a^6\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\\ &= a^6\left(\frac{3\pi}{16} - \frac{5\pi}{32}\right) = \frac{\pi}{32}a^6.\end{aligned}$$

(4)(参考前一个例题) 法 1: 先令 $x = n\pi - t$:

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi} x\,|\sin x|\,\mathrm{d}x &= \int_{n\pi}^0 (n\pi - t)|\sin(n\pi - t)|\mathrm{d}(n\pi - t)\\ &= \int_0^{n\pi} (n\pi - t)|\cos n\pi\sin t|\mathrm{d}t\\ &= n\pi\int_0^{n\pi} |\sin t|\mathrm{d}t - \int_0^{n\pi} t|\sin t|\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

这里用到了 $|\cos n\pi| = 1$. 上式移项得

$$\int_0^{n\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x = \frac{n\pi}{2}\int_0^{n\pi} |\sin x|\mathrm{d}x.$$

又因为 $|\sin x|$ 是周期为 π 的周期函数, 则

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x &= \frac{n\pi}{2}\int_0^{n\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \frac{n\pi}{2}\cdot n\cdot\int_0^{\pi} \sin x\mathrm{d}x\\ &= \frac{n^2\pi}{2}\cos x\Big|_0^{\pi} = \frac{n^2\pi}{2}[1-(-1)] = n^2\pi.\end{aligned}$$

法 2(分段计算): 注意到 $\int_0^{n\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x = \sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\int_{(i-1)\pi}^{i\pi} x\sin x\mathrm{d}x$.

当 i 为奇数时,$(-1)^{i+1}\int_{(i-1)\pi}^{i\pi} x\sin x\mathrm{d}x = -(x\cos x-\sin x)\Big|_{(i-1)\pi}^{i\pi} = (2i-1)\pi.$

当 i 为偶数时,$(-1)^{i+1}\int_{(i-1)\pi}^{i\pi} x\sin x\mathrm{d}x = (x\cos x-\sin x)\Big|_{(i-1)\pi}^{i\pi} = (2i-1)\pi.$

因此

$$\int_0^{n\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+1}\int_{(i-1)\pi}^{i\pi} x\sin x\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}(2i-1)\pi = n^2\pi.$$

□

例 7.14. (P200.25) 设 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le 0,\\ e^{2x}-1, & x>0,\end{cases}$ 求 $\int_0^4 f(x-2)\mathrm{d}x.$

解. 分析: 首先注意到积分号下的是 $f(x-2)$, 不能直接套用已知的 $f(x)$ 的表达式 (实际上 $f(x-2)$ 是由 $f(x)$ 做了一个平移得到的), 所以考虑先做换元 $t=x-2$ 消除掉平移带来的影响 (当然此时积分区间也会相应发生变化). 消除了平移产生的影响后，就可以直接用题目给的函数表达式进行积分计算了.

解: 令 $t=x-2$, 则:

$$\begin{aligned}\int_0^4 f(x-2)\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{2} f(t)\mathrm{d}(t+2) = \int_{-2}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_{-2}^{0}(2t+1)\,\mathrm{d}t + \int_0^2\left(e^{2t}-1\right)\mathrm{d}t = \left(t^2+t\right)\Big|_{-2}^{0} + \left(\frac{1}{2}e^{2t}-t\right)\Big|_0^2\\ &= 0-[(-2)^2+(-2)]+\frac{1}{2}e^4-2-\left(\frac{1}{2}e^0-0\right)\\ &= -2+\frac{e^4}{2}-\frac{5}{2}=\frac{e^4-9}{2}.\end{aligned}$$

□

例 7.15. 设 f 在 $[0,\pi]$ 有二阶连续导数, 且 $f(0)=a, f(\pi)=b$, 求

$$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\mathrm{d}x.$$

解. 分析: 由于只知道 f 在积分区间两个端点处的函数值, 而不知道 $f''(x)$ 的取值信息, 所以直接计算是比较难的. 但是我们知道, 分部积分可以帮助我们降低被积函数里某一部分的导数次数, 所以我们可以尝试先对 $\int_0^{\pi} f''(x)\sin x\mathrm{d}x$ 部分进行分部积分, 即把 $f''(x)$ 放进微分号里面实现降次操作, 然后再看如何利用其他的题设条件来计算. 实际上这道题也巧妙用到了 $\sin x$ 的导函数的周期现象.

解:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f''(x)\sin x\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \sin x\mathrm{d}f'(x) = f'(x)\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)\mathrm{d}\sin x \\ &= 0-0-\int_0^\pi f'(x)\cos x\mathrm{d}x = -\int_0^\pi \cos x\mathrm{d}f(x) \\ &= -\cos x f(x)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi f(x)\mathrm{d}\cos x \\ &= -[f(\pi)\cos\pi - f(0)\cos 0] - \int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此得

$$\begin{aligned}\int_0^\pi [f(x)+f''(x)]\sin x\mathrm{d}x &= \int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x + \int_0^\pi f''(x)\sin x\mathrm{d}x \\ &= -f(\pi)\cos\pi + f(0)\cos 0 \\ &= f(\pi)+f(0) = a+b.\end{aligned}$$

□

例 7.16. (P201.27) 设 $f(x)=\int_0^{1-x} e^{t(2-t)}\mathrm{d}t$, 求 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

解. 分析: 回忆以前在学不定积分的分部积分法时曾经提到, 如果一个函数的积分直接求解比较困难, 但它的导数比较容易求解且形式简单, 则可以考虑使用分部积分法求该函数的不定积分. 这对定积分也是有用的, 例如这里题目要求 $f(x)$ 的定积分, 而 f 是一个变上限积分, 我们知道变上限积分直接求积分不容易, 但是求导数是容易的, 所以这里会想到用分部积分来求这个定积分.

解: 首先直接计算可得 $f'(x) = -e^{1-x^2}$. 因此对待求的定积分使用分部积分法即有

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\mathrm{d}f(x) = f(1)-0-\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 xe^{1-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{1-x^2}\mathrm{d}(1-x^2) \\ &= -\frac{1}{2}e^{1-x^2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}(e^{1-1^2}-e^{1-0}) = \frac{e-1}{2}\end{aligned}$$

□

7.4 反常积分

在讨论定积分时有两个最基本的限制: 积分区间的有穷性和被积函数的有界性. 但在很多实际问题中往往需要突破这些限制, 考虑无穷区间上的“积分”, 或是无界函数的“积分”, 这便是反常积分的引入.

定义 7.3. (无穷限反常积分) 设函数 f 定义在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上, 且在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积. 如果存在极限

$$\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x = J,$$

则称此极限 J 为函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上的无穷限反常积分 (简称无穷积分), 记作

$$J = \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

并称 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 如果上述极限不存在, 为方便起见, 亦称 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

类似地, 可定义 f 在 $(-\infty,b]$ 上的无穷积分. 而对于 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的无穷积分, 它用前面两种无穷积分来定义:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\,,$$

其中 a 为任一实数, 当且仅当右边两个无穷积分都收敛时它才收敛.

定义 7.4. (无界函数的反常积分) 设函数 f 定义在区间 $(a,b]$ 上, 在点 a 的任一右邻域内无界, 但在任何内闭区间 $[u,b]\subset(a,b]$ 上有界且可积. 如果存在极限

$$\lim_{u\to a^+}\int_u^b f(x)\mathrm{d}x = J$$

则称此极限为无界函数 f 在 $(a,b]$ 上的反常积分, 记作

$$J = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

并称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 如果上述极限不存在, 这时也说反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

在上述定义中, 被积函数 f 在点 a 近旁是无界的, 这时点 a 称为 f 的瑕点, 而无界函数反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 又称为瑕积分.

反常积分的计算和之前的非反常定积分的计算方法是类似的, 在计算时也经常使用对称性、换元积分和分部积分等方法. 只不过在处理无穷限区间或者函数无界点时要稍微计算一下对应的极限值.

例 7.17. (P202.46) 计算下列反常积分:

(1)$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(x+1)^4}dx$;　(2)$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$;

(3)$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$;　(4)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\tan x)dx$

解. (1) 令 $u = x+1$, 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x+1)^4}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{(u-1)^2}{u^4}\mathrm{d}(u-1) = \int_1^{+\infty} \frac{u^2}{u^4} - \frac{2u}{u^4} + \frac{1}{u^4}\mathrm{d}u$$
$$= \left(-\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{3u^3}\right)\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{3}.$$

(2) 令 $t = \sqrt{x-1}$, 则

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(t^2+1)}{t(1+t^2)} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$$
$$= 2\arctan t\Big|_0^{+\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi.$$

(3) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\arctan x}{x} = 0, \lim\limits_{x\to+\infty} \ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \ln \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \ln 1 = 0$, 因此

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x = -\int_1^{+\infty} \arctan x\mathrm{d}\frac{1}{x} = -\frac{\arctan x}{x}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}\arctan x$$
$$= -(0 - \arctan 1) + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\pi}{4} + \left(\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\Big|_1^{+\infty}$$
$$= \frac{\pi}{4} + \ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} + 0 - \ln\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

(4) 记 $f(x) = \ln(\tan x)$, 则

$$f(\frac{\pi}{2} - x) = \ln(\tan(\frac{\pi}{2} - x)) = \ln(\cot x) = -\ln(\tan x) = -f(x)$$

因此 $f(x)$ 在积分区间上关于区间中点为奇函数, 原积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\tan x)dx = 0$. □

非常常用的一类反常积分是下面的 p-积分:

性质 7.1. (1) 对于反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, 当 $p \le 1$ 时该积分发散; 当 $p > 1$ 时该积分收敛.
(2) 对于反常积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^q}$, 当 $q \ge 1$ 时该积分发散; 当 $q < 1$ 时该积分收敛.

上面的 p-积分常用于判断反常积分的敛散性, 它的理论基础是下面的比较判别法. 这里仅举出无穷区间反常积分的结论, 无界函数的情形是类似的.

定理 7.7. (反常积分的比较判别法) 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\forall x \in [a, +\infty)$, 成立 $0 \le f(x) \le g(x)$, 则
(1) 若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛;
(2) 若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 也发散.

一般来说, 选取 p-积分 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ 作为比较对象是一个常见的选择, 因为 p-积分的敛散性我们已经研究清楚了, 这就是比较判别法的常用推论, 即书本推论 6.5.14 和 6.5.15.

推论 7.1. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)(a > 0)$ 上连续.
(1) 若存在 $X > 0$, 当 $x > X$ 时有 $0 \le f(x) \le \frac{k}{x^p}(p > 1, k > 0)$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.
(2) 若存在 $X > 0$, 当 $x > X$ 时有 $f(x) \ge \frac{k}{x^p}(p \le 1, k > 0)$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

推论 7.2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)(a > 0)$ 上连续, 且 $f(x) \ge 0$.
(1) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = A(0 < A < +\infty)$ 存在, 即当 $x \to +\infty$ 时 $f(x) \sim \frac{A}{x^p}$, 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ 有相同的敛散性.
(2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = 0, p > 1$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.
(3) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = +\infty, p \le 1$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

例 7.18. 判断下列反常积分的敛散性:
(1)$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4+1}}\mathrm{d}x$;　(2)$\int_1^{+\infty} \left(\frac{x}{x^2+p} - \frac{p}{x+1}\right)\mathrm{d}x$.

解. (1) 因为 $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ 为奇函数，利用对称性则只需判断 0 到 $+\infty$ 部分积分是否收敛即可. 由 $|f(x)| = \frac{|\sin x|}{\sqrt[3]{x^4+1}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}$, 且对
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}\mathrm{d}x$$
分别有
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}\mathrm{d}x < \int_0^1 1\mathrm{d}x = 1, \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}\mathrm{d}x < \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}\mathrm{d}x = -3x^{-\frac{1}{3}}\Big|_1^{+\infty} = 3$$
从而有 $\int_0^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x \le \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}\mathrm{d}x < 4$ 成立, 即该积分收敛. 因此 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 故原反常积分收敛.
(2) 由通分可得
$$\frac{x}{x^2+p} - \frac{p}{x+1} = \frac{(1-p)x^2 + x - p^2}{(x^2+p)(x+1)}$$

当 $p=1$ 时, 因为

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{x-1}{(x^2+1)(x+1)}=1$$

则由书本推论 6.5.15 知原广义积分收敛;

当 $p\neq 1$ 时有

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{(1-p)x^2+x-p^2}{(x^2+p)(x+1)}=1-p\neq 0$$

仍由书本推论 6.5.15 知原广义积分发散. □

7.5 定积分的应用问题

这里主要回顾课本上介绍的几个重要公式, 这些公式的详细推导以及定积分的其他应用请参考课本. 处理旋转体的体积公式外, 在这里我们仅回顾参数方程给出的曲线的应用公式, 因为其他几种情况的曲线 (直角坐标系下的曲线、极坐标下的曲线) 都是它的特例. 如果对这些情况的公式不熟悉, 请参考课本.

定理 7.8. (平面图形的面积) 设曲线 C 由参数方程 $x=x(t),y=y(t),t\in[\alpha,\beta]$ 给出，在 $[\alpha,\beta]$ 上 $y(t)$ 连续，$x(t)$ 连续可微且 $x'(t)\neq 0$(对于 $y(t)$ 连续可微且 $y'(t)\neq 0$ 的情形可类似地讨论). 记 $a=x(\alpha),b=x(\beta)\left(a<b\text{或}b<a\right)$, 则由曲线 C 及直线 $x=a,x=b$ 和 x 轴所围的图形，其面积计算公式为

$$A=\int_a^\beta |y(t)x'(t)|\mathrm{d}t.$$

定理 7.9. (旋转体的体积) 设 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数，Ω 是由平面图形 $0\leq |y|\leq|f(x)|,a\leq x\leq b$ 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体. 那么易知截面面积函数为

$$A(x)=\pi[f(x)]^2,x\in[a,b].$$

则得到旋转体 Ω 的体积公式为

$$V\ =\ \pi\ \int_a^b\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x\,.$$

定理 7.10. (平面曲线的弧长) 设曲线 C 由参数方程 $x=x(t),y=y(t),t\in[\alpha,\beta]$ 给出. 若 C 为一光滑曲线, 则 C 是可求长的, 且弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t\,.$$

定理 7.11. (旋转曲面的侧面积) 如果光滑曲线 C 由参数方程 $x=x(t),y=y(t),t\in[\alpha,\beta]$ 给出，且 $y(t)\geqslant 0$, 那么由曲线 C 绕 x 轴旋转所得旋转曲面的面积为

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta |y(t)|\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

例 7.19. (P204.57) 求曲线 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1(a>0,b>0)$ 与坐标轴所围平面图形的面积.

解. 分析: 根据曲线表达式可知这个平面图形是位于第一象限的. 然而, 如果直接套用平面直角坐标系下的面积公式计算, 会遇到对根式的积分, 计算比较麻烦. 因此可以先考虑将曲线转为参数方程表示, 再用参数方程形式的面积公式计算.

解: 曲线的参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos^4 t, \\ y=b\sin^4 t. \end{cases}$, 这里 $0\le t\le\frac{\pi}{2}$, 且 $t=0$ 对应 $(a,0)$,$t=\frac{\pi}{2}$ 对应 $(0,b)$. 则所求面积为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S}=&\int_0^a y\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\cos^4 t\mathrm{d}(b\sin^4 t)=4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3 t\cos^5 t\mathrm{d}t \\
&=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 t\left(1-\cos^2 t\right)\mathrm{d}\cos t=4ab\left(\frac{1}{6}\cos^6 t-\frac{1}{8}\cos^8 t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&=4ab\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}-0\right)=\frac{4ab}{24}=\frac{ab}{6}.
\end{aligned}
$$

□

注 7.6. 值得注意的是, 在第一步把 x,y 改用参数方程表示之后, 所求的定积分实际上经历了一次换元的过程 (积分变量变成了参数 t), 因此在这里积分的上下限也要跟着改变. 因为 $x=a\cos^4 t$ 而原来的 x 的积分是从 0 到 a 的, 所以以 t 为参数的的定积分应该是从 $\frac{\pi}{2}$ 到 0 的.

例 7.20. 计算曲线 $y=\int_0^x\sqrt{\sin t}\mathrm{d}t(0\le x\le\pi)$ 的弧长.

解. 由于 $y'(x)=\sqrt{\sin x}$, 因此曲线的弧长

$$
\begin{aligned}
l=&\int_0^\pi\sqrt{1+[y'(x)]^2}\mathrm{d}x=\int_0^\pi\sqrt{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^\pi\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x \\
=&\int_0^\pi\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=2\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^\pi \\
=&2[(1-0)-(0-1)]=4.
\end{aligned}
$$

□

注 7.7. 这里令 $t=\sin x$ 的换元方法是不正确的, 因为在 $[0,\pi]$ 上 $\sin x$ 不是单调函数, 因而不存在反函数, 违反了换元积分法的条件.

例 7.21. (P204.65) 已知星形线 $C: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$. 求:
(1) 曲线 C 绕 x 轴旋转一周所得立体的体积;
(2) 曲线 C 的弧长.

解. 首先注意到星形线的参数方程是 $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

(1)

$$\begin{aligned}
\text{V}= \pi \int_{-a}^{a} y^2 \mathrm{d}x &= \pi \int_{\pi}^{0} (a\sin^3 t)^2 \mathrm{d}(a\cos^3 t) = \pi a^3 \int_{\pi}^{0} \sin^6 t \cdot 3\cos^2 t \cdot (-\sin t)\mathrm{d}t \\
&= 3\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^7 t \cos^2 t \mathrm{d}t = 6\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t (1 - \sin^2 t)\mathrm{d}t \\
&= 6\pi a^3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 t \mathrm{d}t \right) = 6\pi a^3 \left(\frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} - \frac{8}{9} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \right) \\
&= 6\pi a^3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{105}\pi a^3.
\end{aligned}$$

(2) 由对称性, 只需求出第一象限内的弧长, 再乘 4 即可. 又 $x'(t) = a \cdot 3\cos^2 t \cdot (-\sin t) = -3a\sin t\cos^2 t, y'(t) = a \cdot 3\sin^2 t \cdot \cos t = 3a\sin^2 t\cos t$, 从而对应孤长为

$$\begin{aligned}
l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\mathrm{d}t &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^4 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\mathrm{d}t \\
&= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t\cos^2 t(\sin^2 t + \cos^2 t)}\mathrm{d}t = 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\mathrm{d}t \\
&= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\mathrm{d}\sin t = 12a \cdot \left(\frac{1}{2}\sin^2 t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 12a \cdot \left(\frac{1}{2} - 0\right) = 6a.
\end{aligned}$$

□

例 7.22. 求曲线 $\begin{cases} x = e^t + e^{-t} \\ y = 2t \end{cases} \quad (0 \le t \le 1)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的侧面积.

解. 由于 $y'(t)=2, x'(t)=e^t-e^{-t}$, 从而旋转曲面的表面积

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi\int_0^1 |y(t)|\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t = 2\pi\int_0^1 2t\sqrt{(e^t-e^{-t})^2+4}\mathrm{d}t \\
&= 4\pi\int_0^1 t\sqrt{(e^t+e^{-t})^2}\mathrm{d}t = 4\pi\left(\int_0^1 te^t\mathrm{d}t+\int_0^1 te^{-t}\mathrm{d}t\right) \\
&= 4\pi\left(\int_0^1 t\mathrm{d}e^t-\int_0^1 t\mathrm{d}e^{-t}\right) = 4\pi\left(te^t\Big|_0^1-\int_0^1 e^t\mathrm{d}t-te^{-t}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-t}\mathrm{d}t\right) \\
&= 4\pi\left[e^1-0-e^t\Big|_0^1-(e^{-1}-0)-e^{-t}\Big|_0^1\right] \\
&= 4\pi[e-(e-1)-e^{-1}-(e^{-1}-1)] \\
&= 4\pi(2-2e^{-1}) = 8\pi\left(1-e^{-1}\right).
\end{aligned}
$$

□

小结 7.1. 可以看到, 定积分的应用题的难点并不在于用定积分来解决问题 (因为每类问题基本上都有现成的公式可以直接套用), 而是难在定积分的计算上, 因此还是需要重视一些常用的定积分计算方法. 此外可以发现在几何方面的应用题中经常会涉及到 Wallis 公式, 即 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx, n\in\mathbb{Z}_+$(例 7.10) 的结果, 因此这两个定积分的结果最好要记住.

7.6 与定积分有关的证明题举例

7.6.1 放缩被积函数方法与拆分区间方法

对于证明定积分有关的不等式问题, 常常会进行如下两种放缩：放缩被积函数和放缩积分区间. 对于前一种, 放缩被积函数常常要和换元法、分部积分法等结合在一起使用, 用于简化被积函数进行放缩; 对于后一种, 则要根据积分区间与被积函数的特点将区间拆分, 然后分别处理放缩每一个区间上的定积分. 从下面这些例子里我们可以看到函数放缩与拆分区间方法的一些技巧.

例 7.23. 设 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上严格递增的连续函数, 证明: $\int_a^b xf(x)dx>\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

解. 分析: 上述不等式可以转化为 $\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx>0$, 则我们要考虑把被积函数转化为一个恒正的形式来证明. 注意到 $\frac{a+b}{2}$ 是积分区间的中点, 我们可以做换元 $t=x-\frac{a+b}{2}$, 并以中点为分界点拆分区间来证明.

证明: 令 $t=x-\frac{a+b}{2}$, 则

$$\begin{aligned}
\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x\\
&=\int_{\frac{b-a}{2}}^0(-t)f(\frac{a+b}{2}-t)(-\mathrm{d}t)+\int_0^{\frac{b-a}{2}}tf(t+\frac{a+b}{2})\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{\frac{b-a}{2}}t\left[f(t+\frac{a+b}{2})-f(\frac{a+b}{2}-t)\right]\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

注意到 $f(x)$ 递增, 则当 $t\in(0,\frac{b-a}{2})$ 时有 $f(t+\frac{a+b}{2})-f(\frac{a+b}{2}-t)>0$. 因此根据定积分的不等式性质, 即得 $\int_a^b xf(x)dx>\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$. □

例 7.24. 证明 $I=\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2dx>0$.

解. 分析: 这个积分的值通过直接计算并不容易处理, 这里也很难使用积分中值定理估计 (因为 $\sin x^2$) 的符号无法确定. 所以需要考虑处理被积函数或者积分区间来放缩.

证明: 令 $t=x^2$ 则

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$$

分别记等号右边的两个积分为 I_1,I_2, 则

$$I_2=\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt=-\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{2\sqrt{x+\pi}}dx\quad(x=t-\pi)$$

因此

$$I=I_1+I_2=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin x(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+\pi}})dx$$

因为当 $x\in(0,\pi)$ 时 $\sin x>0,\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+\pi}}>0$, 因此根据定积分的不等式性质即得 $I>0$. □

例 7.25. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=0$.

解. 分析: 首先要注意, 不能随便交换求极限和求积分的顺序, 即不能随便滴认为下面的式子成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\lim_{n\to\infty}\sin^n xdx$$

实际上这两种运算可交换顺序是有前提的, 不能随意认为它成立. 在这里我们需要用到在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上 $0<\sin x<1$ 以及 $\sin x$ 递增的性质, 巧妙地拆分区间进行放缩. 具体地, 我们在拆分区间时, 可以使在一段子区间上函数有界, 而该子区间长

度可以任意小, 而另一段子区间的长度有限, 但该子区间上函数的积分值可以任意小. 于是两个子区间上的积分值将趋于 0.

证明: 任取 $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则有

$$\begin{aligned} 0 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \sin^n x dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \\ &\le \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \sin^n(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}) dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \\ &\le (\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2})\sin^n(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

因为 $0 < \sin^n(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}) < 1$, 所以

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2})\sin^n(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}) = 0$$

因此对上述 ε, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时 $(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2})\sin^n(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}) < \frac{\varepsilon}{2}$.

故 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时 $0 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx < \varepsilon$. 这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0$. □

7.6.2 使用微分学方法证明

许多问题常常会和中值定理 (也包括积分中值定理) 以及泰勒公式等工具结合起来使用, 尤其是涉及一阶导数、二阶导数等的放缩问题时常常要使用这些工具来辅助证明.

例 7.26. 设 f 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数,$f(\frac{a+b}{2}) = 0$, 记 $M = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, 证明 $|\int_a^b f(x)dx| \le \dfrac{M(b-a)^2}{24}$.

解. 分析: 根据待证明式子的形式以及题目给出的二阶导数条件可知需要借助带拉格朗日余项的泰勒公式证明. 又因为给出了 $f(\frac{a+b}{2}) = 0$ 的条件, 所以考虑在 $\frac{a+b}{2}$ 处对 f 做泰勒展开, 再结合其他条件进行放缩证明.

证明: 将 $f(x)$ 在 $x = \frac{a+b}{2}$ 处泰勒展开

$$f(x) = f(\frac{a+b}{2}) + f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2, \xi \in (a,b)$$

由于 $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, 且直接计算可知 $\int_a^b [f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})]dx = 0$, 因此

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx\right| &\le \frac{1}{2}\int_a^b |f''(\xi)|\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx \\ &\le \frac{1}{6}M\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\Bigg|_a^b = \frac{M(b-a)^2}{24} \end{aligned}$$

□

例 7.27. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有连续的二阶导数,$f(0)=f(1)=0$, 当 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)\neq 0$, 证明 $\int_0^1 |\frac{f''(x)}{f(x)}|dx \geq 4$.

解. 记 $M=\max\limits_{x\in(0,1)}|f(x)|$, 则在 $(0,1)$ 上存在一点 c 使 $|f(c)|=M$. 由拉格朗日中值定理可知 $\exists\xi_1\in(0,c)$ 使得 $\frac{f(c)-f(0)}{c}=f'(\xi_1)$,$\exists\xi_2\in(c,1)$ 使得 $\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=f'(\xi_2)$. 所以得

$$f'(\xi_2)-f'(\xi_1)=-\frac{f(c)}{c(1-c)}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx &\geq \int_{\xi_1}^{\xi_2}\left|\frac{f''(x)}{M}\right|dx=\frac{1}{M}\int_{\xi_1}^{\xi_2}|f''(x)|dx\geq\frac{1}{M}|\int_{\xi_1}^{\xi_2}f''(x)dx|\\ &=\frac{1}{M}|f'(\xi_2)-f'(\xi_1)|=\frac{1}{c(1-c)}\end{aligned}$$

又因为

$$\frac{1}{c(1-c)}\geq\frac{1}{(\frac{c+1-c}{2})^2}=4$$

因此得 $\int_0^1|\frac{f''(x)}{f(x)}|dx\geq 4$. □

7.6.3 构造变限积分证明

这一方法一般是将积分区间的上限改为一个变量, 从而将定积分改为变上限积分, 再使用求导等方法求得变上限积分的最值等性质, 进而证明原来的定积分问题.

例 7.28. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $0\leq f'(x)\leq 1, f(0)=0$. 证明：$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\geq\int_0^1[f(x)]^3\,\mathrm{d}x$.

解. 设 $F(t)=\left(\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right)^2-\int_0^t[f(x)]^3dx$, 则有

$$F'(t)=2f(t)\int_0^t f(x)\mathrm{d}x-f^3(t)=f(t)\left[2\int_0^t f(x)\mathrm{d}x-f^2(t)\right].$$

令 $g(t)=2\int_0^t f(x)dx-f^2(t)$, 则

$$g'(t)=2f(t)-2f(t)f'(t)=2f(t)\left[1-f'(t)\right].$$

由于 $f'(x)\geq 0$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增, 从而 $x\in[0,1]$ 时 $f(x)\geq f(0)=0$, 又由于 $f'(x)\leq 1$, 即 $1-f'(x)\geq 0$, 从而 $t\in[0,1]$ 时 $g'(t)\geq 0$. 从而 $g(t)$ 在 [0,1]

上单调递增, 当 $t\in[0,1]$ 时 $g(t)\geq g(0)=0$. 则对 $F'(t)=f(t)g(t)$, 有 $F'(t)\geq 0$ 成立, 从而 $F(t)$ 在 [0,1] 上单调递增，从而有 $F(1)\geq F(0)=0$ 成立. 因此

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\geq\int_0^1[f(x)]^3\,\mathrm{d}x.$$

□

例 7.29. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$. 证明：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\geq(b-a)^2$.

解. 设 $F(t)=\int_a^t f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^t\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x-(t-a)^2$, 此时 $t\in[a,b]$. 由于 $f(x)>0$, 则

$$\begin{aligned}F'(t)&=f(t)\int_a^t\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x+\frac{1}{f(t)}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x-2(t-a)\\&=\int_a^t\frac{f(t)}{f(x)}\mathrm{d}x+\int_a^t\frac{f(x)}{f(t)}\mathrm{d}x-\int_a^t 2\mathrm{d}x\\&=\int_a^t\left[\frac{f(t)}{f(x)}-2+\frac{f(x)}{f(t)}\right]\mathrm{d}x=\int_a^t\left[\sqrt{\frac{f(t)}{f(x)}}-\sqrt{\frac{f(x)}{f(t)}}\right]^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由于当 $a\leq t\leq x$ 时 $\left[\sqrt{\frac{f(t)}{f(x)}}-\sqrt{\frac{f(x)}{f(t)}}\right]^2\geq 0,F'(t)\geq 0$ 成立. 从而 $F(t)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增, 从而有 $F(b)\geq F(a)$ 成立. 又 $F(a)=0,F(b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}-(b-a)^2$, 即得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\geq(b-a)^2.$$

□

注 7.8. 本题也可以使用柯西不等式证明.