浙江大学 2012-2013 学年 秋冬 学期

《微积分（甲）Ⅰ》课程期末考试试卷

1、设$y=(\sin 2x)^{x}+(\arcsin 2x)^{4}$，求$\dfrac{dy}{dx}$.

2、设函数$f(u)$可导，$y=y(x)$是由方程$y=3f(xy)+\ln(1+\sin x)$所确定的可导函数，求$\dfrac{dy}{dx}$.

3、设$y=y(x)$是由参数方程$\begin{cases} x=3t^2+2t+3 \\ y=\displaystyle\int_0^t (3u+1)\sin u^2 du \end{cases}$所确定，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=\sqrt{\pi}}$.

4、计算定积分$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1+\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[3]{x^2}}dx$.

5、计算反常积分$\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$.

6、求极限$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+\sin x)}+\frac{1}{\ln(1-\sin x)}\right)$.

7、求极限$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{1-\sqrt{1-x^3}}$.

8、求$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{\cos^2 x}}$.

9、求幂级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n3^n}$的收敛半径，收敛区间及收敛域.

10、将函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$展开成x的幂级数，并写出成立的开区间.

11、求不定积分$\displaystyle\int\frac{1+x^2+x^4}{x^3(1+x^2)}\ln(1+x^2)dx$.

12、设$f(x)\in C[0,1]$且恒正.试证明：

（1）存在$\xi\in(0,1)$使得以曲线$y=f(x)$为顶在区间$[0,\xi]$上的曲边梯形面积等于以$f(\xi)$为高，以区间$[\xi,1]$为底的矩形面积；

（2）若增设$f(x)$可导且$f'(x)<0$，则（1）中的ξ是唯一的.

13、设$f(x)$在区间$(0,+\infty)$内可导且$f'(x)<0$，$F(x)=\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{1}xf(u)du+\int_{1}^{\frac{1}{x}}\frac{f(u)}{u^2}du$

（1）求$F''(x)$ （当$x>0$）；

（2）讨论曲线$y=F(x)$在区间$(0,+\infty)$内的凹凸性并求其拐点坐标.

14、设$a_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx$，$n\geqslant 2$，

（1）计算a_n+a_{n+2}，并证明$\dfrac{1}{2(n+1)}<a_n<\dfrac{1}{2(n-1)}$，（当$n\geqslant 2$）；

（2）证明级数$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n$条件收敛.

浙江大学 2013-2014 学年 秋冬 学期

《微积分（甲）Ⅰ》课程期末考试试卷

1、设$y=y(x)$是由方程$x^2+y=\tan(x-y)$所确定，且$y(0)=0$，求：$y'(0)$和$y''(0)$.

2、设函数$y=y(x)$是由参数方程$\begin{cases} x=\int_0^t 2e^{-s^2}ds \\ y=\int_0^t \cos s^2 ds \end{cases}$所确定，求：$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\sqrt{\pi}}$.

3、求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\cos 2x}{x^2}$.

4、求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

5、求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

6、求积分：$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$.

7、求积分：$\displaystyle\int_{-1}^{1}(2+x)^2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$.

8、证明：当$0\leqslant x<+\infty$时，$\arctan 3x\leqslant \ln(1+4x)$，当且仅当$x=0$时等号成立.

9、求幂级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}$的收敛半径、收敛域，并计算其和函数.

10、设常数$a>0, f(x)=\dfrac{1}{3}ax^3-x$，试求$f(x)$在$\left[0,\dfrac{1}{a}\right]$上的最大值和最小值.

11、求曲线$y^2=x+2$与直线$y=x$所围区域绕直线$x=2$旋转一周的体积.

12、证明如下“$\dfrac{0}{0}$”型的洛必达($L'Hosptial$)法则：

设（1）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$；

（2）$f(x)$、$g(x)$在去心邻域$U(x_0)$内可导，且$g'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A(或\infty)$，则：$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

请举例说明当条件（3）不成立，但$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$存在，即不能使用洛必达($L'Hosptial$)法则.

13、设$f(x)=-\cos\pi x+(2x-3)^3+\dfrac{1}{2}(x-1)$. 试讨论并证明方程$f(x)=0$根的个数.

浙江大学 2014-2015 学年 秋冬 学期

《微积分（甲）Ⅰ》课程期末考试试卷

【注】：第 1~9 题，每题均为 6 分；第 10~13 题，每题均为 10 分；第 14 题 6 分.

1、设 $f(x)=(x-1)(x^2-2)(x^3-3)(x^{100}-100)$，求：$f'(1)$.

2、设函数 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+3t+1\\y=t^3-3t+2\end{cases}$ 所确定，求：曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间（用参数 t 的区间表示，并且也用 x 的区间能表示）；并计算拐点坐标.（用点 (x,y) 表示）

3、设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2=\int_0^{y-x}e^{-t^2}dt$ 确定，求：曲线 $y=y(x)$ 上 $x=0$ 处的曲率半径.

4、求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$.

5、设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x^{2n+1}+(a-1)x^n+1}{x^{2n}-ax^n+1}$ 在区间 $(0,\ +\infty)$ 内连续，求：常数 a 的值.

6、求曲线 $y=\frac{1}{x}+\frac{x}{1-e^x}$ 的所有渐近线的方程.

7、求定积分：$\int_{-2}^{2}(x-1)^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

8、计算反常积分：$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^3}dx$.

9、设常数 $a>0, a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{a+x^n}\,dx$，讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ 是条件收敛，绝对收敛还是发散？并给出论证过程.

10、设 $f(x)=(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}(x\neq 0)$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.求：$f(0)$ 及曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程.

11、摆线 L 的参数方程 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi, a>0)$，曲线 L 与 x 轴所围成的区域为 D,求:D 绕直线 $y=2a$ 旋转一周所得立体的体积.

12、求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛半径、收敛域及和函数.

13、（1）设 $0<x<+\infty$，证明：$\exists\,\eta\in(0,1)$ 使得 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\eta}}$；

（2）对上面所得 η,求出 η 关于 x 的表达式 $\eta=\eta(x)$，并确定当 $0<x<+\infty$ 时，函数 $\eta=\eta(x)$ 的值域.

14、证明：(1) $\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx>0$；

(2) 对 $\forall\,\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，有 $\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx>\sin\alpha\ln\frac{\pi^2-\alpha^2}{\alpha(2\pi-\alpha)}$.

浙江大学 2015-2016 学年 秋冬 学期

《微积分（甲）Ⅰ》课程期末考试试卷

1. 设$y=\frac{x^3}{3}\arccos x-\frac{1}{9}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}+\ln 5$，求$dy$.

2. 设$y=y(x)$是由参数方程$\begin{cases} x(t)=\sqrt{1+t^2} \\ y(t)=\int_1^{t^2}\frac{3^u}{\sqrt{1+u}}du \end{cases}$所确定，求$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

3. 设$y=y(x)$是由方程$y^3+xy^2+x^2y-3=0$所确定，求曲线$y=y(x)$在点$(1,1)$处的曲率.

4. 求积分$\int_0^2 x^2\sqrt{2x-x^2}\,dx$.

5. 求广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}dx$.

6. 已知$f(x)=\int_1^x\frac{\ln(1+t)}{t}dt$，计算$\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$.

7. 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(e^x+1)\ln(1+x)}$.

8. 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^x}{\sqrt{1-x^3}-1}$.

9. 设数列$a_n=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\dots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}$, $n=1,2,\dots$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

10. 已知$f(x)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}\,dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}\,dt$，求$f(x)$零点的个数.

11. 将$f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$展开成$x$的幂级数，并写出成立的区间.

12. 设数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$满足$0<a_n<\frac{\pi}{2}$, $0<b_n<\frac{\pi}{2}$, $\cos a_n-a_n=\cos b_n$，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛.

（1）证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；

（2）证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$收敛.

13. 设l_1为曲线$y=x^2$在点$A(a,a^2)\,(a>0)$处的切线，l_2为曲线$y=x^2$的另一条切线，且与切线l_1垂直.

（1）求l_1和l_2的交点坐标；

（2）求曲线$y=x^2$与切线l_1和l_2所围成的平面图形的面积，并问a为何值时，该面积最小？

14. 设奇函数$f(x)$在$[-1,1]$上具有 2 阶导数，且$f(1)=1$，证明：

（1）存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=1$；

（2）存在$\eta\in(-1,1)$，使得$\eta f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

浙江大学 2016-2017 学年 秋冬 学期

《微积分（甲）Ⅰ》课程期末考试试卷

一、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1、设 $f(x)=x^2e^x$，则 $f^{(10)}(0)=$__________.

2、$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=$__________.

3、设 $\begin{cases}x=\cos 2t\\ y=(1-\cos t)^2\end{cases}$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$__________.

4、$f(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$，$x\in(-\infty,+\infty)$，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点（变凹点）是__________.

5、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=$__________.

6、设 $f(x)$ 为连续函数且 $f(x+2)-f(x)=x$，$\displaystyle\int_0^2 f(x)dx=1$，则 $\displaystyle\int_1^3 f(x)dx=$__________.

二、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

1、求极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)^{\frac{1}{x}}-1}{x}$.

2、求不定积分 $\displaystyle\int\frac{x^5}{\sqrt[4]{x^3+1}}dx$.

3、求广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}$.

4、已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^x-y+\dfrac{1}{2}\sin y=0$ 确定，求 $y'|_{x=0}$ 和 $y''|_{x=0}$ 的值.

5、求曲线 $y=e^x$，$0\leqslant x\leqslant\ln\sqrt{3}$ 的弧长.

三、已知函数 $f(x)=ax^2+bx$ 满足 $f(x)\geqslant 0$，$x\in[0,1]$.设平面有界区域 D 由 $y=f(x)$ 与直线 $x=1$ 及 x 轴围成.

（1）求 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积 V_0；

（2）当 D 的面积等于 $\dfrac{1}{3}$ 时，求 a,b 的值使得体积 V_0 取到最小值.

四、求函数 $F(t)=\displaystyle\int_0^{\pi}|\sin x-t|dx$ 的最小值.

五、按定义证明 $\displaystyle\lim_{x\to 1}x^2=1$.

六、证明对，$\forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\tan x>x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+\dfrac{x^7}{63}$.

浙江大学2017-2018学年 秋冬 学期

《微积分（甲）Ⅰ》课程期末考试试卷

1.（8分）设a，b为实常数，已知函数$f(x)=\begin{cases}(2017+x)^{x}+b, & x\geqslant 0\\ a(1-x)^{\frac{1}{x}}, & x<0\end{cases}$,在$x=0$处可导，试求$a$，$b$的值.

2.（7分）计算极限值：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[4]{x^4+1}\right)$.

3.（5分）设$f(x)=\arctan x$，试求$f^{(2018)}(0)$的值.

4.（5分）用$\varepsilon-N$语言证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^2+1}{3n^2+4}=\dfrac{2}{3}$.

5.（5分）设$f(t)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{t}, & t\neq 0\\ 1, & t=0\end{cases}$，又设$F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$，试求$F'(0)$的值.

6.（10分）设可导函数$y=y(x)$满足方程$x^y+y^x=2$，试求$dy\big|_{x=1}$.

7.（10分）设$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=t-\sin t, & t\in(0,1)\\ y=1-\cos t, & t\in(0,1)\end{cases}$决定，试求$y'(x)$，$y''(x)$.

8.（7分）求不定积分$\displaystyle\int\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx, x\in(-1,1)$.

9.（8分）求函数$y=x^3-3|x|+1$的极值.

10.（8分）计算反常积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$的值.

11.（7分）从半径为$r>0$的圆形铁皮中剪去一个顶点在圆心的扇形，使卷起所得的漏斗具有最大的容积，问此时应剪去的扇形的中心角为多少？

12.（5分）设$c<d$是两个实数，f是开区间(c,d)上的二阶可导数，且$\forall x\in(c,d), f''(x)>0$，试证明：$\forall x_1,x_2\in(c,d)$，且$x_1<x_2$有$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\dfrac{1}{x_2-x_1}\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt\leqslant\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

13.（7分）（1）证明：$\forall n\in N, \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n dx$；

（2）$\forall n\in N$,记$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx$，证明：$\forall n\in N$，$n\geqslant 2$，有$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$；

（3）证明：$\forall n\in N^+$，$I_{2n}=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, \forall n\in N, I_{2n+1}=\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$；

（4）证明$Wallis$公式：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}$.

14.（8分）（1）$\forall n\in Z^+$，令$a_n=\dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$，试证明正数数列$\{a_n\}$单调递减.从而由单调有界数列必有极限得数列$\{a_n\}$收敛，记其极限为$\alpha$；

（2）$\forall n\in Z^+$，令$b_n=a_n e^{-\frac{1}{4n}}$，试证明数列$\{b_n\}$单调递增.又$\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\alpha$，由此可得$\alpha>0$；

（3）利用$Wallis$公式证明$\alpha=\sqrt{2\pi}$；

（4）证明最简形式的$Stirling$公式：$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n(n\to\infty)$.

浙江大学 2018-2019 学年 秋冬 学期

《微积分（甲）Ⅰ》课程期末考试试卷

1.对$\forall n\in\mathbb{Z}^+$,设$a_n=(1+\frac{1}{n})^n,b_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$，且已知数列$\{a_n\}$严格单调递增，数列$\{b_n\}$严格单调递减。试用$e$的定义证明不等式：$\forall n\in\mathbb{Z}^+$，有$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$

2.求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3+2x)^x-3^x}{\arcsin(x^2)}$

3.设$f(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}x^2}$，求$f^{(2019)}(0)$.

4.设有函数$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{e^x-1}, & x\neq 0;\\ 1, & x=0.\end{cases}$,令$f(x)=B_0+\frac{B_1}{1!}x+\frac{B_2}{2!}x^2+\cdots+\frac{B_n}{n!}+o(x^n),x\to 0$(其中$n$为某个大于等于三的正整数).试计算$B_0,B_1,B_2$的值.

5.设$f(x)=x^{\frac{1}{x}},x>0$，求$f(x)$在$(0,+\infty)$上的最大值.

6. 设函数$y=y(x)$在$x=0$的某个邻域内一阶可导，且满足$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\frac{y(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{2019}$,求$y(0),y'(0),y''(0)$.

7.设可微函数$y=y(x)$满足方程$x^3+y^3+3xy=1$,求$dy\Big|_{x=1}$

8.求不定积分$\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$

9.已知反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$,试求反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{(\sin x)^2}{x^2}dx$.

10.求参数曲线$\gamma\begin{cases}x=t-\sin t, & t\in[0,1];\\ y=1-\cos t, & t\in[0,1].\end{cases}$的弧长.

11.设$\{a_n\}$是一个实数列，a是一个实数,(1)试用$\varepsilon-N$语言描述$\{a_n\}$收敛于a;(2)试用$\varepsilon-N$语言描述$\{a_n\}$不收敛于a.

12.设f在开区间$(0,1)$上有定义,且满足对于$(0,1)$中的任意三点$x_1<x_2<x_3$成立不等式

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\leq\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

现任取$(0,1)$中一点x_0,试证明f在点x_0处右连续.

13.设f在$[0,+\infty)$上具有连续的导函数，且严格单调增加，$f(0)=0$,又设$a>0,b>0$为两个实常数,试证明下述不等式成立：$\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy\geq ab$.

14. 对$\forall n\in\mathbb{Z}^+$,设$a_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i}}{n\sqrt{n+\frac{1}{i}}}$,试证明:$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\frac{2}{3}$.

浙江大学 2019-2020 学年 秋冬 学期

《微积分（甲）Ⅰ》课程期末考试试卷

1. 设数列a_n满足: $a_1=1, \forall n\in\mathbb{Z}^+, a_{n+1}=\sin a_n$,
(1)证明数列a_n收敛并求其极限; (2)试计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_{n+1}}{a_n})^{\frac{6}{(a_n)^2}}$.

2. 试求曲线$y=\dfrac{\ln x}{x}$的拐点坐标.

3. 设有函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^2} & ,x\neq 0;\\ 0 & ,x=0.\end{cases}$,试求$f'(0)$.

4. 设有函数$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}} & ,x\neq 0且x>-1;\\ e & ,x=0.\end{cases}$,令$f(x)=M_0+\dfrac{M_1}{1!}x+\dfrac{M_2}{2!}x^2+\dfrac{M_3}{3!}x^3+o(x^3), x\to 0$.试计算$M_1,M_2,M_3$的值.

5. 设函数$f(x)=\displaystyle\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$,试求$f(x)$的所有极值点及极值.

6. 试求曲线$y=2e^{\frac{x}{2}}, x\in[\ln 3, 3\ln 2]$的弧长.

7. 设可微函数$y=y(x)$由方程$3^{xy}=x+y$确定,试计算$dy\Big|_{x=0}$.

8. 设函数$y=y(x)$满足$\begin{cases}x=t+e^t\\ y=\displaystyle\int_0^t \ln(1+e^u)du\end{cases}$,试求$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

9. 试计算反常积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}}$的值.

10. 试求不定积分$\displaystyle\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}+\frac{\ln x}{x}dx$.

11.设x_0,a是两个实数,f在x_0一个去心邻域$U^o(x_0)$上有定义,试用$\varepsilon-\delta$语言描述$f(x)$当x趋向于x_0时收敛于a.

12. 试计算定积分$\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+2x+x^2)}{1+x^2}dx$.

13. 设f在$(-1,2)$上有连续的导函数,且满足$f(0)=0, f(1)=1$.试证明

$$\int_0^1|f(x)-f'(x)|dx\geq\frac{1}{e}.$$

14. 设f在$[0,1]$上可导,且满足$f'_+(0)<f'_-(1)$,又设$\lambda\in(f'_+(0),f'_-(1))$,试证明:存在$x_0\in(0,1)$使得$f'(x_0)=\lambda$.

浙江大学 2020-2021 学年<u> 秋冬 </u>学期

《微积分（甲）Ⅰ》课程期末考试试卷

1. 试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-\dfrac{1}{\sin^2\frac{1}{n}}\right)$.

2. 试求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{(x+1)^2}\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$.

3. 试求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

4. (1) 设$a_1,\cdots,a_m$是m个正实数，试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(a_1)^n+\cdots+(a_m)^n}$;

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\displaystyle\int_1^2 e^{-nt^2}dt\right)^{\frac{1}{n}}$.

5. 设曲线γ由极坐标方程$r=1+\cos\theta,\theta\in[0,2\pi]$确定，试求曲线$\gamma$的弧长.

6. 试求反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx$.

7. 求椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$上一点$(x_0,y_0)$使得它到直线$3x+5y=15$的距离最短.

8. 设函数$y=y(x)$满足$\begin{cases}x=t-\sin t,t\in(0,2\pi)\\ y=1-\cos t,t\in(0,2\pi)\end{cases}$，试求$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$, 并求函数$y=y(x)$的极值.

9. 设f在$\mathbb{R}$上连续, 且以$T(>0)$为周期

(1) 试证明函数$F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt-\frac{x}{T}\int_0^T f(u)du$以$T$为周期；

(2) 试证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(u)du$;

(3) 试求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x|\sin t|dt}{x}$.

10. 设函数f在$[0,1]$上连续且取值恒正，试证明存在唯一的$c\in(0,1)$, 使得$\displaystyle\int_0^c f(x)dx=\int_c^1\frac{dt}{f(t)}$.

11. 设函数f在$(0,1)$上连续且满足$\forall x_1\in(0,1),x_2\in(0,1),x_3\in(0,1)$, 且$x_1<x_2<x_3$, 都有$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$成立. 若设$a<b$且$[a,b]\subset(0,1)$, 试证明：
$\exists L>0$使得$\forall t_1,t_2\in[a,b]$, 有$|f(t_2)-f(t_1)|\leq L|t_2-t_1|$成立.

12. 设f在$[0,1]$上二阶可导, 且满足$f(0)=0=f(1)$, $\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1$,试证明：$\exists x_0\in(0,1)$, 使得$f''(x_0)\geq 8$.

浙江大学 2021-2022 学年 秋冬 学期

《微积分（甲）Ⅰ》课程期末考试试卷

1. 求反常积分$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

2. 求极限
$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x^7+x^6)^{\frac{1}{7}}-(x^7-x^6)^{\frac{1}{7}}\right].$$

3. 求不定积分$\int\frac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x}\mathrm{d}x, x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

4. (1)当$x>0$时, 证明 $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$.
(2)求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

5. 求曲线$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$在区间$[0,1]$上的长度.

6. 设函数$f(x)=\ln\cos x$,令$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+o(x^4), x\to 0$.
试计算a_0,a_1,a_2,a_3,a_4的值.

7. 求$f(x)=-3x^5+5x^3+2$的极值.

8.由参数方程$\begin{cases}x=e^t\cos t\\ y=e^t\sin t\end{cases}$ 确定函数$y=y(x)$,试求$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$, 其中$t\in(0,\frac{\pi}{4})$.

9. 已知函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上连续, 且有唯一极值点x_0. 若x_0为极大值点, 证明$f(x_0)$为$f(x)$的最大值.

10. 已知函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续, 在$(0,+\infty)$上可导, $f(0)<0$, 且对$\forall x>0, f'(x)>1$. 求证: $f(x)$在$[0,+\infty)$上有唯一零点.

11. 函数$f(x)$在$(0,1)$上有定义, 且对任意$0<x_1<x_2<x_3<1$, 有$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\geq\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$成立, 对$\forall n\in\mathbb{N}_+$, 令$a_n=(n+2)\left[f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$, 求证: 数列$\{a_n\}$收敛.

12.设$f(x)$在$[0,1]$上连续, 且$\forall x\in[0,1]$,有$\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t\geq\frac{1-x^3}{2}$成立. 求证: $\int_0^1[f(t)]^2\mathrm{d}t\geq\frac{5}{12}$.

浙江大学 2022-2023 学年 秋冬 学期

《微积分（甲）Ⅰ》课程期末考试试卷

1. 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^n.$$

2. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right).$$

3. 设参数方程$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\pi}+x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(1) 求 $f'(0)$. (2) 是否 $\exists\delta>0$ 使得 $f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 内严格单调递增? 请说明理由.

4. 已知二阶可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\displaystyle\int_0^{x+y}e^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x y\sin[(t+1)^2]\mathrm{d}t$ 确定. 计算 $y(0),y'(0),y''(0)$.

5. 设函数 $f(x)=e^{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}$, 且当 $x\to 0$ 时有 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+o(x^4)$. 求 a_2, a_3, a_4.

6. 求反常积分

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan e^x}{e^x}\mathrm{d}x.$$

7. 已知曲线 l 满足方程 $r=2^\theta$, $\theta\in[e,\pi]$, 求曲线 l 的弧长.

8. 求定积分

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\frac{t}{2}}(\cos t-\sin t)}{\sqrt{\cos t}}\mathrm{d}t.$$

9. 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶可导, 求证 $\displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)$.

10. 设 α 为一给定正实数, $n=2^{2023}$, 证明: $\forall 0<x<1$, $n^\alpha x^n\le e^{-\alpha}\alpha^\alpha(-\ln x)^{-\alpha}$.

11. 已知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且对任意 $x\in[0,1]$ 都有 $g(x)\ge 0$. 证明: $\exists x_0\in[0,1]$ 使得

$$\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(x_0)\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x.$$

12. 已知 $f(x)$ 在 $(-1,2)$ 上连续, $g(x)$ 在 $(-1,2)$ 上单调递增且导函数连续. 证明: $\exists\xi\in[0,1]$ 使得

$$\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(0)\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x+g(1)\int_\xi^1 f(x)\mathrm{d}x.$$