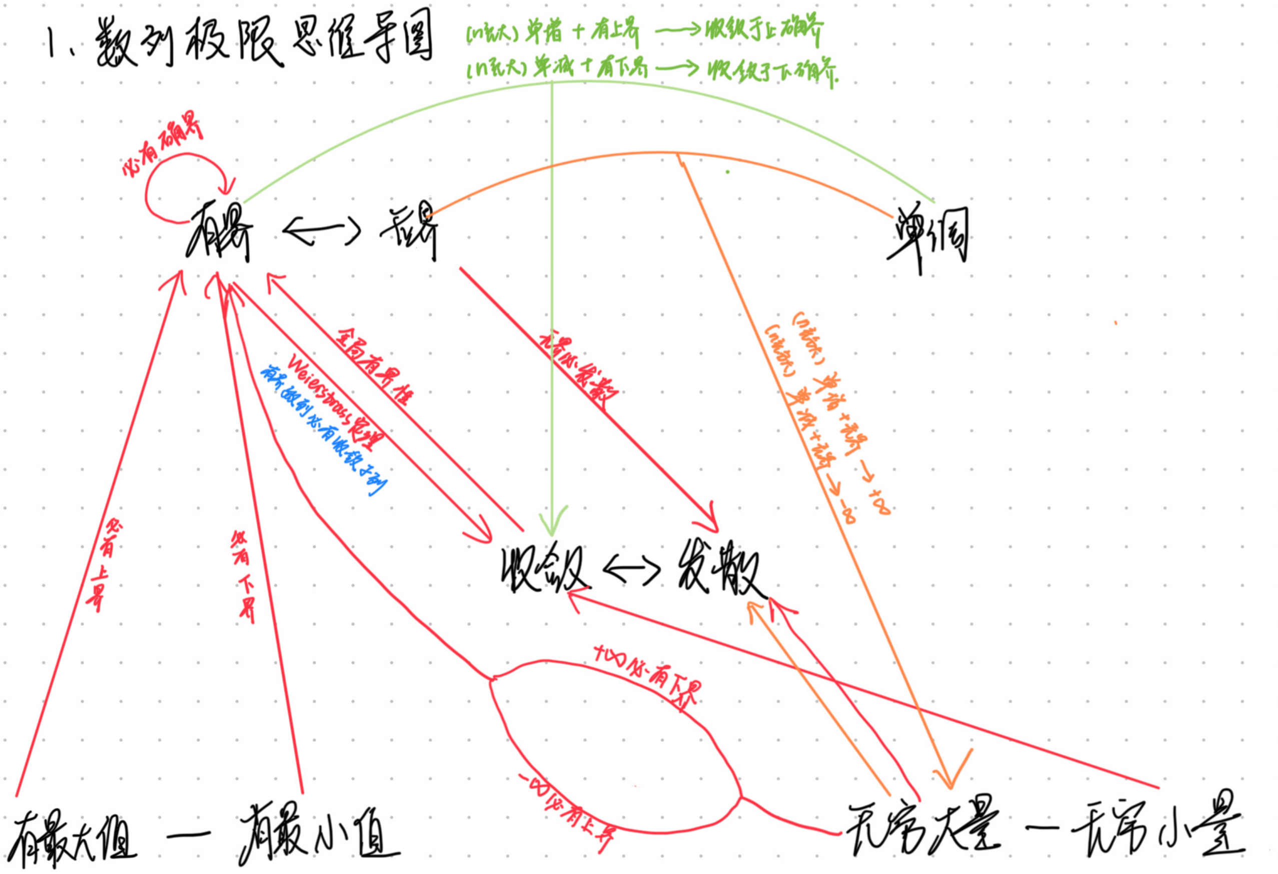
有界性、单调性、无穷大(小)量、敛散性、最值关系

1、数列极限思维导图



数列极限的性质

1. 唯一性.

Pf: 假设 $\{a_n\}$ 有两个极限 $A \neq B$ 设 $A > B$
取 $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$ $\exists N_1 > 0$ $\forall n > N_1$
$\frac{B-A}{2} < a_n - A < \frac{A-B}{2} \Rightarrow a_n > \frac{A+B}{2}$
取 $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$ $\exists N_2 > 0$ $\forall n > N_2$
$\frac{B-A}{2} < a_n - B < \frac{A-B}{2} \Rightarrow a_n < \frac{A+B}{2}$
$N = \max\{N_1, N_2\}$ $\forall n > N$.
$a_n > \frac{A+B}{2}$ 与 $a_n < \frac{A+B}{2}$ 矛盾 故 $A = B$

2. 全局有界性

Pf: 取定 ε, $\exists N \in N^*$, $\forall n > N$. $|a_n - A| < \varepsilon$
$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$
$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, |A-\varepsilon|, |A+\varepsilon|\}$ 故 $\forall n \in N^*$ $|a_n| \leqslant M$
故 $\{a_n\}$ 有界

3. 保号性. 1' $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ $\lim_{n\to\infty} b_n = B$
2' $A > B$
$\Rightarrow \exists N \in N^*$ $\forall n > N$, $a_n > b_n$

Pf: $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$ $\exists N_1 \in N^*$ $\forall n > N_1$ $|a_n - A| < \frac{A-B}{2}$
$\Rightarrow a_n > \frac{A+B}{2}$
$\varepsilon = \frac{A-B}{2}$ $\exists N_2 \in N^*$ $\forall n > N_2$ $|b_n - B| < \frac{A-B}{2}$
$\Rightarrow b_n < \frac{A+B}{2}$
取 $N = \max\{N_1, N_2\}$ $a_n > \frac{A+B}{2} > b_n$

推论. $\forall A > \eta > C$ (或 $A < \eta < C$)
$\exists N \in N^*$ $\forall n > N$ $a_n > \eta$ ($a_n < \eta$)
Pf: 取 $b_n = \eta$

4. 保不等式性 1' $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ $\lim_{n\to\infty} b_n = B$
2' $n > N$ 时 $a_n > b_n$ ($a_n \geqslant b_n$)
$\Rightarrow A \geqslant B$

Pf: 假设 $A < B$
$\varepsilon = \frac{B-A}{2}$ $\exists N_1 \in N^*$ $\forall n > N_1$ $|a_n - A| < \frac{B-A}{2}$
$\Rightarrow a_n < \frac{A+B}{2}$
$\varepsilon = \frac{B-A}{2}$ $\exists N_2 \in N^*$ $\forall n > N_2$ $|a_n - B| < \frac{B-A}{2}$
$\Rightarrow b_n > \frac{A+B}{2}$
$N_0 = \max\{N_1, N_2\}$ $\forall n > N_0$ $a_n < \frac{A+B}{2} < b_n$
不存在 $N \in N^*$ $\forall n > N$ $a_n > b_n$ ($a_n \geqslant b_n$) 矛盾

总论：判定收敛的方法

平极限

有界 > 收敛 > 无穷小量

最基本的方法

3 判定收敛

① 定义法 $\varepsilon-N$ 语言
- $|a_n-A|=\varepsilon$ 可解
- $|a_n-A|=\varepsilon$ 不可解 将 $|a_n-A|$ 放大

$\to N(\varepsilon)$

② 夹逼准则 1' $c_n \leq a_n \leq b_n$ （n充分大时）

2' $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

③ 单调有界准则

柯西收敛

④ Cauchy 收敛准则 $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in N^*\ \forall n,m>N$ s.t. $|a_m-a_n|<\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in N^*\ \forall n>N,\ \forall p\in N^*$ s.t. $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in N^*\ \forall n>N,$ s.t. $|a_n-A|<\varepsilon$

充分性：$\forall \frac{\varepsilon}{2}>0\ \exists N_1\in N^*\ \forall n>N_1$ 成立 $|a_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0$ 取 $N=N_1$ $\forall m,n>N$ 有 $|a_m-a_n|=|a_m-A+A-a_n| \leq |a_m-A|+|a_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

必要性：

证明有界

取 $\varepsilon=1$ $\exists N_0\in N^*$，取 $m=N_0+1$ $\forall n>N$ 成立 $|a_n-a_{N_0+1}|<1$

$\Rightarrow |a_n|-|a_{N_0+1}|<|a_n-a_{N_0+1}|<1$

$\Rightarrow |a_n|<|a_{N_0+1}|+1$

$M=\max\{|a_1|,|a_2|,\dots,|a_{N_0}|,|a_{N_0}|+1\}$ 则 $\forall n\in N^*$ 有 $|a_n|\leq M$ $\{a_n\}$ 有界

利用子列极限求母列

由 Weierstrass 定理知 $\exists \{a_{n_k}\}$ $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}=A$

$\forall \frac{\varepsilon}{2}>0,\ \exists K\in N^*\ \forall k>K$ $|a_{n_k}-A|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \frac{\varepsilon}{2}>0,\ \exists N_1\in N^*$ 取 $m=n_{N_1+1}\geq N_1+1>N_1$ $\forall n>N_1$ $|a_n-a_{n_{N_1+1}}|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0$ 取 $N=\max\{N_1,K\}$ $\forall n>N$ $|a_n-a_{n_{N+1}}|=|a_n-A+A-a_{n_{N+1}}| \leq |a_n-A|+|a_{n_{N+1}}-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A.$

(数列) Weierstrass & 归结 (少用)

⑤ Weierstrass 定理 有界数列必存在收敛子列

⑥ Heine 定理 (归结原则) $\forall \{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ 均有 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

> $\{n_k\}$ 为严格单增数列
> $n_k > n_{k-1} > \cdots > n_1 \geqslant 1$
> $n_k - n_1 \geqslant k-1 \quad n_k \geqslant n_1 + k - 1 \geqslant k$
> 即常用结论：$n_k \geqslant k$

Toeplitz (加权版柯西)

⑦ Toeplitze 定理

1' $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} = 1$ (或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} = 1$)

2' $\lim\limits_{n\to\infty} t_{nk} = 0$

3' $t_{nk} \geqslant 0$

4' $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ (或 0 或 $\pm\infty$)

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} a_k = A$

> Pf: 由 a_n 得 找到 N_0 { 由 4' 得 $\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists N_0 \in N^* \ \forall n > N_0$
> 成立 $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$
> 且收敛数列的有界 $\exists M > 0$ 有 $\forall n \in N^*$
> $|a_n - A| < M$
> 由 N_0 放缩 t_{nk} { 由 2' 得 $\forall \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2N_0M}$, $\exists N_1 \in N^* \ \forall n > N_1$
> 成立 $|t_{nk} - 0| = t_{nk} < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2N_0M}$
> 拆分 { $\forall \varepsilon > 0$ 取 $N = \max\{N_0, N_1\}$ $\forall n > N$
> 有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} a_k - A\right| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}(a_k - A)\right|$
> $\leqslant |t_{n1}(a_1 - A) + \cdots + t_{nN_0}(a_{N_0} - A)| + |t_{nN_0+1}(a_{N_0+1} - A) + \cdots + t_{nn}(a_n - A)|$
> $\leqslant N_0 \frac{\varepsilon}{2N_0M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Stolz 定理 (洛必达前身)

⑧ Stolz 定理

$\frac{0}{0}$ 型

1' $\{a_n\}$ 严格单调 (n 充分大)

2' $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 同为无穷小量

3' $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = l$ (或 $\pm\infty$)

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = l$ (或 $\pm\infty$)

$\frac{*}{\infty}$ 型

1' $\{a_n\}$ 严格单调 (n 充分大)

2' $\{a_n\}$ 为符号确定的无穷大量

3' $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = l$ (或 $\pm\infty$)

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = l$ (或 $\pm\infty$)

> Pf: 仅证 $\{a_n\}$ 单减时 $\frac{0}{0}$ 型
> 由 3' 得 $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \in N^* \ \forall n > N_0$
> $\left|\frac{b_n - b_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} - l\right| < \varepsilon$
> $\Leftrightarrow l - \varepsilon < \frac{b_n - b_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} < l + \varepsilon$
> $\Leftrightarrow (l-\varepsilon)(a_n - a_{n+1}) < b_n - b_{n+1} < (l+\varepsilon)(a_n - a_{n+1})$
> 有 $(l-\varepsilon)(a_{n+1} - a_{n+2}) < b_{n+1} - b_{n+2} < (l+\varepsilon)(a_{n+1} - a_{n+2})$
> $\cdots$
> $(l-\varepsilon)(a_{m-1} - a_m) < b_{m-1} - b_m < (l-\varepsilon)(a_{m-1} - a_m)$
> 累加得 $(l-\varepsilon)(a_n - a_m) < b_n - b_m < (l-\varepsilon)(a_n - a_m)$
> 有 $\left|\frac{b_n - b_m}{a_n - a_m} - l\right| < \varepsilon$
> 恒转 $\frac{b_n}{a_n} - l = \left(1 - \frac{a_m}{a_n}\right)\left(\frac{b_n - b_m}{a_n - a_m} - l\right) + \frac{b_m - l a_m}{a_n}$
> $\left|\frac{b_n}{a_n} - l\right| \leqslant \underbrace{\left|1 - \frac{a_m}{a_n}\right|}_{0< \ <1} \left|\frac{b_n - b_m}{a_n - a_m} - l\right| + \left|\frac{b_m - l a_m}{a_n}\right| \rightarrow \lim\limits_{m\to\infty}$ 极限为 0
> $\lim\limits_{m\to\infty}\left|\frac{b_n}{a_n} - l\right| = \left|\frac{b_n}{a_n} - l\right| \leqslant \lim\limits_{m\to\infty}\left|\frac{b_n - b_m}{a_n - a_m} - l\right| \leqslant \varepsilon$
> 即 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = l$

Cauchy命题（算均 & 几均）

⑨ Cauchy命题

算术平均值

1° $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$（或 $\pm\infty$）

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) = A$（或 $\pm\infty$）

pf：只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 的情况

$\forall \varepsilon > 0$ 取 $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ $\exists N_0 \in N^*$ $\forall n > N_0$

$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

设 $\{a_n\}$ 的界为 $M > 0$.

则 $\left|\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)\right| \leq \frac{1}{n}|a_1 + \cdots + a_{N_0}|$

$+ \frac{1}{n}|a_{N_0+1} + \cdots + a_n|$

$\leq \frac{N_0 M}{n} + \frac{n-N_0}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \frac{N_0 M}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$ 取 $N = \max\left\{\frac{2MN_0}{\varepsilon}, N_0\right\}$

$\forall n > N$，有 $\frac{1}{n}|a_1 + \cdots + a_n| < \varepsilon$ 成立

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) = 0$

几何平均值

1° $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$（或 $\pm\infty$）且 $a_n > 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = A$（或 $\pm\infty$）

pf：$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)} = A$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) = A$.

由夹逼准则知

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = A$

推论1 1° $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = l$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = l$

推论2 1° $\{a_n\}$ 正数列

2° $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

重要极限 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

解：即求 $\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$ $a_n = \frac{n^n}{n!}$

由推论2 可得

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

总论：判定数列发散的方法

$\xrightarrow{\text{严苛度}}$

发散 > 无界 > 无穷大量

最基本3法

①定义法

$\exists A,\ \forall \varepsilon>0\ \exists N>0\ \forall n>N$ 成立 $|a_n-A|<\varepsilon$

$\Updownarrow$ 否

$\forall A,\ \exists \varepsilon_0>0\ \forall N>0\ \exists n_0>N$，成立 $\underbrace{|a_{n_0}-A|\geqslant\varepsilon_0}_{\text{一般用三角不等放缩}}$

$\forall A\ \exists \varepsilon_0>0\ \forall N>0\ \exists n_0=N+\underbrace{[f(A)]}_{\text{多数时候}}$

由N与A决定

$|a_{n_0}-A|>|a_N|>\varepsilon_0$

例 证 $\{n\}$ 不收敛

$\forall A$ 取 $\varepsilon_0=1$ $\forall N>0$ 取 $n_0=N+[A]+1$

$|n_0-A|=|N+[A]+1-A|>|N|\geqslant 1$

②证明无界

无界数列必发散

$\uparrow$ 逆否

收敛数列必有界

有界：$\exists M>0\ \forall n\in N^*$ 成立 $|a_n|\leqslant M$

$\downarrow$ 否

无界：$\forall G>0\ \exists n_0\in N^*$ 成立 $|a_{n_0}|>G$

③反夹逼

$a_n\geqslant b_n$ b_n 无上界

$a_n\leqslant c_n$ c_n 无下界

例 证 $\{\frac{n^3+n-7}{n+3}\}$ 无界

事实上我们只需令 $n>7$

$\frac{n^3+n-7}{n+3}>\frac{n^3}{2n}=\frac{1}{2}n^2$

归结定理推论

④ Heine

若 $\{a_n\}$ 存在某个发散子列 或
存在两个收敛于不同值的子列 $\Longrightarrow$ $\{a_n\}$ 发散

例 证 $a_n=\sqrt[n]{1+3^{(-1)^n n}}$ 发散

令 $n_k=2k$ $a_{n_k}=(1+3^{2k})^{\frac{1}{2k}}$ $3<a_{n_k}<2^{\frac{1}{2k}}\cdot 3$

$\lim\limits_{k\to\infty}3\cdot 2^{\frac{1}{2k}}=3$ 故 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=3$

令 $n_t=2t-1$ $a_{n_t}=\left(1+\frac{1}{3^{2t-1}}\right)^{\frac{1}{2t-1}}$ $1<a_{n_t}<2^{\frac{1}{2t-1}}$

$\lim\limits_{t\to\infty}2^{\frac{1}{2t-1}}=1$ 故 $\lim\limits_{t\to\infty}a_{n_t}=1$

根据归结原理 $\{a_n\}$ 存在两个极限不等的子列，发散

Cauchy收敛准则

$\forall \varepsilon>0,\ \exists N>0,\ \forall n,m>N$ 成立 $|a_n-a_m|<\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0\ \exists N>0\ \forall n>N,\ \forall p>0$ 成立 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$

$\Updownarrow$ 否

$\exists \varepsilon_0>0\ \forall N>0\ \exists n_0,m_0>N$ 成立 $|a_{n_0}-a_{m_0}|\geqslant\varepsilon_0$

$\exists \varepsilon_0>0\ \forall N>0\ \exists n_0>N\ \exists p_0\in N_+$ 成立 $|a_{n_0+p_0}-a_{n_0}|\geqslant\varepsilon_0$

$S_n=1+\frac{1}{2^t}+\frac{1}{3^t}+\dots+\frac{1}{n^t}$ $n\in N_+$ 其中 $t\leqslant 1$ 证明 $\{S_n\}$ 发散

pf: $|S_{n+p}-S_n|=\frac{1}{(n+1)^t}+\frac{1}{(n+2)^t}+\dots+\frac{1}{(n+p)^t}\geqslant\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+p}$

取 $p=n$ $|S_{n+p}-S_n|\geqslant\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}\geqslant n\cdot(\frac{1}{2n}+\dots+\frac{1}{2n})=\frac{1}{2}$

取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$ $\forall N>0$ 取 $n_0=[N]+1$ $p_0=n_0=[N]+1$

$|S_{n_0+p_0}-S_{n_0}|\geqslant\frac{1}{2}=\varepsilon_0$ 故 $\{S_n\}$ 发散

Cauchy收敛准则

适用场景
- 无穷级数（累加形式）
- 递推式已给出

例1 数分习题P80

$a_n = 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}$

$b_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$

$c_n = \frac{\sin 2x}{2(2+\sin 2x)}+\frac{\sin 3x}{3(3+\sin 3x)}+\dots+\frac{\sin nx}{n(n+\sin nx)}$ 证明收敛

pf: 要 $|a_{n+p}-a_n| = \frac{1}{(n+1)!}+\dots+\frac{1}{(n+p)!} \leqslant \frac{1}{(n+1)n}+\dots+\frac{1}{(n+p)(n+p-1)}$

$= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}$

$= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon$ 只需 $n>\frac{1}{\varepsilon}$

$\forall \varepsilon>0\ \exists N=\frac{1}{\varepsilon},\ \forall n>N,\ p\in N_+$ 成立 $|a_{n+p}-a_n|<\frac{1}{n}<\varepsilon$

要 $|b_{n+p}-b_n| = \left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}+\dots+(-1)^{n+p}\frac{1}{n+p}\right|$

$= \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\dots+(-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}$

$< \left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\dots+(-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}\right]+\left[\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+\dots+(-1)^{p-2}\frac{1}{n+p}\right]$

$= \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$ 只需 $n>\frac{1}{\varepsilon}$

$\forall \varepsilon>0\ \exists N=\frac{1}{\varepsilon},\ \forall n>N\ p\in N_+$ 成立 $|a_{n+p}-a_n|<\frac{1}{n}<\varepsilon$

要 $|c_{n+p}-c_n| = \left|\sum_{k=1}^{p}\frac{\sin(n+k)(x)}{(n+k+\sin(n+k)x)(n+k)}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{p}\frac{|\sin(n+k)x|}{|\sin(n+k)x+n+k|(n+k)}$

$< \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(n+k-1)(n+k)} = \sum_{k=1}^{p}\left[\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}\right] = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon$

只需 $n>\frac{1}{\varepsilon}$

$\forall \varepsilon>0\ \exists N=\frac{1}{\varepsilon}\ \forall n>N\ p\in N_+$ 成立 $|a_{n+p}-a_n|<\frac{1}{n}<\varepsilon$

数列（可迭代/通项不可表示）数列

可迭代数列

$x_{n+1}=f(x_n)$

(1) 若$\{x_n\}$的每一项都在$f(x)$的单增区间中 $\Rightarrow$ $\{x_n\}$单调

(2) 若$\{x_n\}$的每一项都在$f(x)$的单减区间中 $\Rightarrow$ $\{x_{2k}\}$与$\{x_{2k-1}\}$分别单调，单调性相反

pf: (1) 假设 $x_1=x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_2=x_3$

$x_n=x_{n-1} \Rightarrow f(x_n)=f(x_{n-1}) \Rightarrow x_{n+1}=x_n$

假设 $x_1>x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2) \Rightarrow x_2>x_3$

$x_{n-1}>x_n \Rightarrow f(x_{n-1})>f(x_n) \Rightarrow x_n>x_{n+1}$

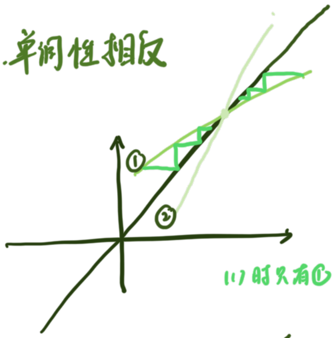
（$x_1<x_2$同理，略）

(2) 则$f(f(x))$单增 有 $x_{n+2}=f(f(x_n))$

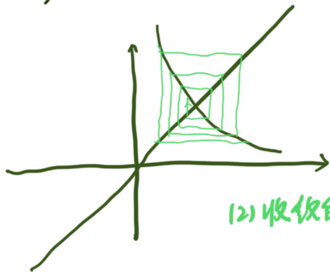
假设 $x_1>x_3 \Rightarrow f(x_1)<f(x_3)$ $x_2<x_4$

由(1)知道$\{x_{2k}\}$与$\{x_{2k-1}\}$分别单调

且单调性相反



(1)时只有①情况是收敛的



(2)收敛的情况

Process：证明收敛并求极限（单元）

求$A=f(A)$不动点（暗）

判断$f(x)$单调性

单增 / 未知 / 单减

单减：化为 $x_{n+2}=f(f(x_n))$

[相当于 $f(x_n)-f(x_{n-1})$] 通用 $x_{n+1}-x_n$? 0；正项时 $\frac{x_{n+1}}{x_n}$? 1

$x_{n+2}-x_n$? 0；正项 $\frac{x_{n+2}}{x_n}$? 1 [相当于 $f(f(x_n))-f(f(x_{n-2}))$]

判断有界

$x_{n+1}=f(x_n)$

$A=f(A)$

作差得 $x_{n+1}-A$ 与 x_n-A 同号

$A=f(A)$求A（明）

奇偶分别判断有界

$x_{n+2}=f(f(x_n))$

$A=f(f(A))$

作差得关系

$A=f(f(A))$（明）

x_{2k}与x_{2k-1}收于同一极限

$\Downarrow$

定义证 x_n收于A（$\max\{2K_1-1, 2K_2\}$）

应急程序

不单调怎么办？

试图转化成 $a_n=|x_n-A|$ 的极限问题

证明 a_n单调有界 | 奇偶分别单调有界

压缩映射原理

例1

17. 令 $y_0 \geqslant 2$, $y_n = y_{n-1}^2 - 2, n \in \mathbf{N}_+$. 设 $S_n = \frac{1}{y_0} + \frac{1}{y_0 y_1} + \cdots + \frac{1}{y_0 y_1 \cdots y_n}$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{y_0 - \sqrt{y_0^2 - 4}}{2}$.

解: ① $y_0 = 2$ $\quad y_1 = y_0^2 - 2 = 2 \quad y_n = 2 \Rightarrow y_{n+1} = y_n^2 - 2 = 2$

归纳可知 $y_n = 2$ $\quad S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1 = \frac{y_0 - \sqrt{y_0^2 - 4}}{2}$

② $y_0 > 2$ $\quad$ 设 $y_0 = a + \frac{1}{a}$ $\quad y_1 = (a + \frac{1}{a})^2 - 2 = a^2 + \frac{1}{a^2}$

$y_n = a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}} \Rightarrow y_{n+1} = y_n^2 - 2 = a^{2^{n+1}} + \frac{1}{a^{2^{n+1}}}$

归纳可知 $y_n = a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}}$

$$\frac{1}{y_0 \cdots y_n} = \frac{1}{(a + \frac{1}{a})(a^2 + \frac{1}{a^2}) \cdots (a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}})}$$

$$= \frac{a - \frac{1}{a}}{a^{2^{n+1}} - \frac{1}{a^{2^{n+1}}}} = \frac{(a - \frac{1}{a}) \cdot a^{2^{n+1}} (a^{2^{n+1}} - 1)}{(a^{2^{n+2}} - 1)(a^{2^{n+1}} - 1)}$$

$$= -(a - \frac{1}{a}) \cdot \left[\frac{1}{a^{2^{n+2}} - 1} - \frac{1}{a^{2^{n+1}} - 1}\right]$$

$$S_n = -(a - \frac{1}{a}) \left[\frac{1}{a^{2^{n+2}} - 1} - \frac{1}{a^2 - 1}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -(a - \frac{1}{a}) \left[0 - \frac{1}{a^2 - 1}\right] = a$$

$a^2 - y_0 a + 1 = 0$ $\quad a_1 = \frac{y_0 + \sqrt{y_0^2 - 4}}{2} > y_0$ (舍去)

$a_2 = \frac{y_0 - \sqrt{y_0^2 - 4}}{2} < y_0$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = a = \frac{1}{2}(y_0 - \sqrt{y_0^2 - 4})$

可迭代数列（多元数列）

例1 ① $a_1=a \quad b_1=b \quad c_1=c$

② $a_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n+c_n) \quad b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+c_n) \quad c_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n \quad \lim\limits_{n\to\infty}b_n \quad \lim\limits_{n\to\infty}c_n$.

解：$a_{n+1}-b_{n+1}=(-\frac{1}{2})\cdot(a_n-b_n) \Rightarrow a_n-b_n=(-\frac{1}{2})^{n-1}(a-b)$

同理 $b_n-c_n=(-\frac{1}{2})^{n-1}(b-c)$

$$\begin{cases} a_n=b_n+(-\frac{1}{2})^{n-1}(a-b) \\ c_n=b_n-(-\frac{1}{2})^{n-1}(b-c) \end{cases}$$

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+c_n)=b_n+\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})^{n-1}(a+c-2b)$$

$$b_n=\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n-1}}{1+\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}(a+c-2b)+b$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{3}(a+c-2b)+b=\frac{1}{3}(a+b+c)$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{2})^{n-1}(a-b)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-c_n)=\lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{2})^{n-1}(b-c)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{1}{3}(a+b+c)$$

数列（迭代/通项不可表示）极限

通项不可表示

例1. ① $f_n(x)=x^n+nx-2\ (x>0)$　$f_n(x_n)=0$

(1) 求证 $f_n(x)$ 有唯一零点 x_n (2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)^n$

(1) pf: $f_n'(x)=nx^{n-1}+n>0$

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递增

$f(\frac{1}{n})=(\frac{1}{n})^n-1<0$

$f(1)=1+n-2=n-1>0$

故 $\exists x_n\in[\frac{1}{n},1]$ 使 $f(x)=0$ 且 x_n 唯一

(2) 解: $f_n(\frac{2}{n})=(\frac{2}{n})^n+2-2>0$

$f_n(x_n)=0<f_n(\frac{2}{n})$ 故 $x_n<\frac{2}{n}$

$f_n(\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2})=(\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2})^n-\frac{1}{n}$ 与 $(2n-1)^n-n^{2n-1}$ 同号

与 $n\ln(2n-1)-(2n-1)\ln n$ 与 $\frac{\ln(2n-1)}{2n-1}-\frac{\ln n}{n}$ 同号

$g(x)=\frac{\ln x}{x}$　$x>e$ 时 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$　$g(x)$ 严格单减

故 $n\geq3>e$ 有 $g(2n-1)<g(n)\Rightarrow f(\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2})<0$

$f_n(x_n)=0>f_n(\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2})$　$x_n>\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\ (n\geq3)$

故 $n\geq3$ 有　$\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}<x_n<\frac{2}{n}$

$(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2})^n<(1+x_n)^n<(1+\frac{2}{n})^n$

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2})^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2})}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot(\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2})}=e^2$

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln(1+\frac{2}{n})}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\frac{2}{n}}=e^2$

由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)^n=e^2$

$0<x_n<\frac{2}{n}$.　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

$\lim\limits_{n\to\infty}n\ln(1+x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=\lim\limits_{n\to\infty}2-x^n=2$

总结: 关于"猜"

① $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^n+nx_n-2)=0$.

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^n+nx_n)=2$

说明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 那么 x_n^n 大概率 $\to0$

x_n 大概率 $\to\frac{2}{n}$

② 由 $(1+x_n)^n$　$n\to\infty$ 也可猜测与 e 有关

那么 x_n 与 $\frac{k}{n}$ 形式不可分割.

例2　① $\{x_n\}$ 为正数列 ② $x_{n+1}+\frac{1}{x_n}<2$　$n\in N_+$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

解: $x_{n+1}+\frac{1}{x_n}<2\leq x_n+\frac{1}{x_n}$

$x_{n+1}<x_n\Rightarrow\{x_n\}$ 单调递减

且 $x_n>0$ 以 0 为下界 故 $\{x_n\}$ 收敛. 极限存在

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

由保不等性得　$a+\frac{1}{a}\leq2$

$a+\frac{1}{a}\geq2$

故 $a+\frac{1}{a}=2$ 得 $a=1$　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$

总结 ① 假设极限存在 已知

$A+\frac{1}{A}\leq2$ 本身有 $A+\frac{1}{A}\geq2$

故可知 $A=1$

② 看单调性 作差

$x_{n+1}-x_n<2-\frac{1}{x_n}-x_n=\frac{-(x_n-1)^2}{x_n}\leq0$

例3　① $x_n<1$　② $x_{n+1}(1-x_n)\geq\frac{1}{4}$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

解: $x_{n+1}(1-x_n)\geq\frac{1}{4}\geq x_n(1-x_n)$

由于 $1-x_n>0$　故 $x_{n+1}\geq x_n$

$\{x_n\}$ 单调递增且有上界 1, $\{x_n\}$ 收敛

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$　　$A(1-A)\geq\frac{1}{4}$　又已知 $A(1-A)\leq\frac{1}{4}$

于是 $A(1-A)=\frac{1}{4}$　$A=\frac{1}{2}$

函数极限

函数极限定义

① 有处
- 左极限 $x\to x_0^-$ $f(x)$在$\mathring{U}_-(x_0)$有定义 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ $\forall x\in\mathring{U}_-(x_0,\delta)$ $|f(x)-A|<\varepsilon$ $\Rightarrow f(x_0^+)=f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$
- 右极限 $x\to x_0^+$ $f(x)$在$\mathring{U}_+(x_0)$有定义 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ $\forall x\in\mathring{U}_+(x_0,\delta)$ $|f(x)-A|<\varepsilon$ $\Rightarrow f(x_0^-)=f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$

$\Rightarrow f(x_0^+)=f(x_0^-)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

$x\to x_0$ $f(x)$在$\mathring{U}(x_0)$有定义 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ $|f(x)-A|<\varepsilon$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

② ∞处
- $x\to-\infty$ $f(x)$在$(-\infty,b]$有定义 $\forall\varepsilon>0$ $\exists X>0$ $\forall x<-X$ $|f(x)-A|<\varepsilon$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$
- $x\to+\infty$ $f(x)$在$[a,+\infty)$有定义 $\forall\varepsilon>0$ $\exists X>0$ $\forall x>X$ $|f(x)-A|<\varepsilon$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$

$x\to\infty$ $f(x)$在$(-\infty,b]\cup[a,+\infty)$有定义 $\forall\varepsilon>0$ $\exists X>0$ $\forall|x|>X$ $|f(x)-A|<\varepsilon$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$

函数极限性质

① 唯一性

② 局部有界性 $x\to x_0$极存 $\Rightarrow \exists\mathring{U}(x_0)$ $\forall x\in\mathring{U}(x_0)$ $f(x)$有界　　$x\to\infty$极存 $\Rightarrow \exists X>0$ $\forall|x|>X$，$f(x)$有界

③ 保号性 若：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$ $A>B$ $\Rightarrow$ $\exists\delta>0$ $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ $f(x)>g(x)$

推：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$A>c$（或$A<c$） $\Rightarrow$ $\forall A>\eta>c$（或$A<\eta<c$） $\exists\delta>0$ $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ $f(x)>\eta$（$f(x)<\eta$）

④ 保不等式性 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$ $\exists\mathring{U}(x_0)$ $\forall x\in\mathring{U}(x_0)$ $f(x)>g(x)$（$f(x)\geq g(x)$） $\Rightarrow A\geq B$

⑤ 复合函数极限 $y=f(u)$ $u=\varphi(x)$ $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$ $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$. 且$\exists\mathring{U}(x_0)$ $\forall x\in\mathring{U}(x_0)$ $\varphi(x)\neq u_0$（$f(u)$不连续 u_0无定义 / $f(u_0)\neq A$）

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=A$

$y=f(u)$ $u=\varphi(x)$ $f(u)$在u_0处连续

$\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x))$　　1^∞处理方法：利用e^x在R上的连续性

无穷小量 $\lim\limits_{x\to ?}f(x)=0$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists X$ $\forall|x|>X$ / $\exists\delta>0$ $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ $|f(x)|<\varepsilon$

A 有限个无穷小量和 → 无穷小量

B 有限无穷小量积 → 无穷小量

C 有界量·无穷小量 → 无穷小量

若$\lim\limits_{x\to ?}f(x)=0$ 且$\exists f(x)\neq0$（指x充分大/${\mathring{U}}$，求商） 则$\lim\limits_{x\to ?}\frac{1}{f(x)}=\infty$

$\lim\limits_{x\to ?}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ $f(x)$ to $g(x)$高阶的无穷小量 → $f(x)=o(g(x))$　$o(1)$无穷小量 $O(1)$有界量

$\lim\limits_{x\to ?}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ $f(x)$ to $g(x)$低阶的无穷小量

$\lim\limits_{x\to ?}\frac{f(x)}{g(x)}=c$ $f(x)$与$g(x)$为同阶无穷小量 $c=1$时 $f(x)\sim g(x)$

$\lim\frac{f(x)}{(x-x_0)^k}=c$ k阶无穷小量

无穷大量 $\lim\limits_{x\to ?}f(x)=\infty$ $\forall G>0$ $\exists X$ $\forall|x|>X$ / $\exists\delta>0$ $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ $|f(x)|>G$
- 正无穷大量 $\forall G>0$ $\exists X>0$ $\forall|x|>X$ / $\exists\delta>0$ $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ $f(x)>G$
- 负无穷大量 $\forall G>0$ $\exists X>0$ $\forall|x|>X$ / $\exists\delta>0$ $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ $f(x)<-G$

关于等价量 替换定理
只能在 有限 且 积/商 时使用

A 有限和 → 无穷大量

B 有限积 → 无穷大量

$\lim\limits_{x\to ?}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ $f(x)$ to $g(x)$高阶的无穷大量

$\lim\limits_{x\to ?}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ $f(x)$ to $g(x)$低阶的无穷大量

$\lim\limits_{x\to ?}\frac{f(x)}{g(x)}=c$ $f(x)$与$g(x)$为同阶无穷大量 $c=1$时 $f(x)\sim g(x)$

连续性

① $f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0)$ / $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

② $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$

③ $\forall\{x_n\}\in U(x_0)$ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$

⇓ 在x_0处连续　既左连又右连

① $f(x_0^-)=f(x_0)$（$f(x_0^+)=f(x_0)$） ⇒ 在x_0处左连（右连）

② $\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\Delta y=0$（$\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\Delta y=0$）

点 → 区间(a,b) $\forall x_0\in(a,b)$ $f(x)$在x_0处连续

区间$[a,b]$ $f(x)$在(a,b)上连续 ⊕ $f(x)$在a处右连 b处左连

一致连续

连：$\underline{\forall x_0\in E}$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta=\boxed{\delta(\varepsilon,x_0)}>0$ $\forall|x-x_0|<\delta$ $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ ⇒在E上连

一致连：$\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta=\boxed{\delta(\varepsilon)}>0$ $\underline{\forall x_1,x_2\in E}$，$|x_1-x_2|<\delta$ $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ ⇒在E上一致连

Cantor定理：$f(x)$在$[a,b]$连续 ⇔ $f(x)$在$[a,b]$上一致连续
推论
$f(x)$在(a,b)上一致连续 ⇔ $f(x)$在(a,b)连且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$存在 $\lim\limits_{x\to b^-}$存在

函数点连续性的性质

① 四则运算　② 复合函数

③ 复合极限 若$\underline{y=f(u)在u\to u_0连续}$ $\underline{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0}$ 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x))$　外层连续　内层只需极限存在

闭区间上连续函数的性质

①最值定理与有界性 若$f(x)\in C[a,b]$ 则$\exists x_1,x_2\in[a,b]$ 使$f(x_1)\leq f(x)\leq f(x_2)$ $\xrightarrow{有界性}$ $m=f(x_1)$（下确界） $M=f(x_2)$（上确界）

②零点定理与介值定理 若$f(x)\in C[a,b]$ 且 $f(a)\cdot f(b)<0$ 则$\exists x_0\in(a,b)$ 使$f(x_0)=0$ $\xrightarrow{介值}$ 若$f(x)\in C[a,b]$ 且$f(a)\neq f(b)$ 则 $\forall \min\{f(a),f(b)\}<\eta<\max\{f(a),f(b)\}$ $\exists x_0\in(a,b)$ $f(x_0)=\eta$

导数与微分

可导性

大前提：$U(x_0)$ 有定义

单侧可导　$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$　则称 $f_+'(x_0)$ 存在为右导数 $f_+'(x_0)=A$ $\longrightarrow$ 单侧连续　$U_+(x_0)$ 有定义

↓

点可导　$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A=f_+'(x_0)=f_-'(x_0)$　则称 $f'(x_0)$ 存在 $f'(x_0)=A$ $\longrightarrow$ 点连续　$U(x_0)$ 有定义

↓

(a,b)可导　$\forall x\in(a,b)$ $f'(x)$ 存在，则称 $f(x)\in D(a,b)$ $\longrightarrow$ 开区间连续　(a,b) 有定义

↓

[a,b]可导　$f(x)\in D(a,b)$ 且 $f_+'(a)$ 与 $f_-'(b)$ 存在 $\longrightarrow$ 隐含 $f(a)$ 与 $f(b)$ 存在（闭区间连续）　$[a,b]$ 有定义

单侧二阶可导 →	点二阶可导 →	(a,b)二阶可导 →	[a,b]二阶可导
$f'(x)$ 在 $U_+(x_0)$ 有定义	$f'(x)$ 在 $U(x_0)$ 有定义	$f'(x)$ 在 (a,b) 有定义	$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 有定义
$f(x)$ 在 $U_+(x_0)$ 有定义	$f(x)$ 在 $U(x_0)$ 有定义	$f(x)$ 在 (a,b) 有定义	$f(x)$ 在 $[a,b]$ 有定义
$f'(x)$ 在 x_0 右连续	$f'(x)$ 在 x_0 连续	$f'(x)$ 在 (a,b) 连续	$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 连续
$f(x)$ 在 $U_+(x_0)$ 连续	$f(x)$ 在 $U(x_0)$ 连续	$f(x)$ 在 (a,b) 连续	$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续

可微性 $\Longleftrightarrow$ 可导性

点可微的定义　$\Delta y=\underbrace{A\Delta x}_{\Delta y\text{的线性主部}}+\underbrace{o(\Delta x)}_{\Delta x\text{的高阶无穷小}}$　$f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+o(x-x_0)$　其中 A 与 Δx 无关　则称 $f(x)$ 在 x_0 处可微

$f(x)$ 在 x_0 处的微分 $\longleftarrow$ $dy=A\Delta x$　　$\Delta y=dy+o(\Delta x)$　$(\Delta x\to 0)$　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)=\frac{dy}{dx}=A$ $\longrightarrow$ 又称为微商

$\Delta y\sim dy$　若 $f'(x)\neq 0$　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{dy+o(\Delta x)}{dy}=1+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{dx}{dy}=1+0\cdot A=1$

四则运算　$duv=udv+vdu$　$d\frac{u}{v}=\frac{vdu-udv}{v^2}$ $(v\neq 0)$　$d(u+v)=du+dv$　$d(u-v)=du-dv$

一阶微分形式不变性　$y=f(u)$ $u=\varphi(x)$（x处可微且可微）　$dy=f'(u)du$　$du=\varphi'(x)dx$　形式一致

初等函数 + 双曲求导

常　$(C)' = 0$

幂　$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$　$(\alpha \in R)$

指　$(a^x)' = a^x \ln a$　　$(e^x)' = e^x$

对　$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$　　$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

三　$(\sin x)' = \cos x$　　$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \sec^2 x$　　$(\cot x)' = -\csc^2 x$

$(\sec x)' = \sec x \tan x$　　$(\csc x)' = -\csc x \cot x$

反三　$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$　$\to \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$　　$\operatorname{arccot} x = \frac{-1}{1+x^2}$　$\to \arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$

双曲　$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$　　$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2}$

反双曲　$(\operatorname{arcsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\to \ln(x+\sqrt{x^2+1})$　　$\operatorname{arcch} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\to \ln(x+\sqrt{x^2-1})$ $(x>0)$

$(\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$ $\to \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

反函数求导

严格单调 ⟶ 双射 ⟶ 有逆映射（反函数）

严格单调的连续函数 ⟶ 有严格单调的连续反函数

+ 可导且导不为0　　+ 可导且导不为0

一阶

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(y)} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(\frac{dx}{dy})}$$

二阶

$$(f^{-1}(x))'' = \frac{-f''(y)\cdot\frac{1}{f'(y)}}{(f'(y))^2} = \frac{-f''(y)}{(f'(y))^3} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\frac{d^2x}{dy^2}}{(\frac{dx}{dy})^3}$$

三阶

$$(f^{-1}(x))''' = \frac{-f'''(y)\cdot\frac{1}{f'(y)}\cdot[f'(y)]^3 - 3[f'(y)]^2\cdot f''(y)\cdot\frac{1}{f'(y)}\cdot(-f''(y))}{(f'(y))^6}$$

$$= \frac{-f'''(y)\cdot f'(y) + 3[f''(y)]^2}{[f'(y)]^5}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3(\frac{d^2x}{dy^2})^2 - \frac{d^3x}{dy^3}\cdot\frac{dx}{dy}}{(\frac{dx}{dy})^5}$$

隐函数（方程）求导.

$F(x, y) = 0$　　把 y 看作 x 函数. 求导

求 $x=a$ 的 $\frac{d^ky}{dx^k}$：①方程求k次导. ②令(k+1)个方程中 $x=a$ 求 $y, y', \dots, y^{(k-1)}$ ③ 代入最后一个方程 求 $y^{(k)}$

求 $\frac{d^ky}{dx^k}$：　①方程求一次导 ②把导数放到一侧，代入前方程

参数方程求导

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

求 $\frac{d^ky}{dx^k}$：① 求 $\frac{d}{dt}(\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}})$　② 求 $\frac{dx}{dt}$　③ 求 $\frac{\frac{d}{dt}(\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}})}{\frac{dx}{dt}}$

常用n阶导

1. 幂函数类 $(ax+b)^\alpha$

$y=(ax+b)^\alpha \quad y^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\cdot a^n\cdot(ax+b)^{\alpha-n}$

$y=\frac{1}{(ax+b)^\alpha} \quad y^{(n)}=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\cdot a^n\cdot(-1)^n\cdot\frac{1}{(ax+b)^{\alpha+n}}$

$y=\ln(ax+b) \quad y^{(n)}=(n-1)!\cdot a^n\cdot(-1)^{n-1}\frac{1}{(ax+b)^n}$

$y=\frac{1}{ax+b} \quad y^{(n)}=n!\cdot a^n\cdot(-1)^n\frac{1}{(ax+b)^{n+1}}$

2. 指、对类

$y=a^{kx+b} \quad y^{(n)}=k^n\cdot(\ln a)^n a^{kx+b}$

$y=\log_a(kx+b) \quad y^{(n)}=\frac{1}{\ln a}\cdot(n-1)!\,k^n\cdot(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(kx+b)^n}$

3. 三角函数类

$y=\sin(ax+\varphi) \quad y^{(n)}=a^n\sin(ax+\varphi+\frac{n\pi}{2})$

$y=\cos(ax+\varphi) \quad y^{(n)}=a^n\cos(ax+\varphi+\frac{n\pi}{2})$

$y=\arctan x \quad (1+x^2)y^{(n+1)}+2nxy^{(n)}+n(n-1)y^{(n-1)}=0$

$y=\arcsin x \quad (1-x^2)y^{(n+2)}-2x(n+1)y^{(n+1)}-n(n+1)y^{(n)}=0$

4. 混合型

① 指*X.

- X为三 $y=e^{ax}\sin(bx+c)$ $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

  $y^{(n)}=e^{ax}(\sqrt{a^2+b^2})^n\sin(bx+c+n\varphi)$
- X为幂 运用Leibniz展开即可

② 幂^n*X $|_{x=a}$ 利用n+1及之后的(幂^n)导为0及 $x=a$时幂^{n}为0

只有n阶导时$(幂^n)^{(n)}|_{x=a}=n!$ 不为0

运用Leibniz展开即

③ 反三$^n|_{x=0}$ 运用$(反三)^n$与$(反三)^{n-1}$的递推关系

及两个基本 $\arctan x$ 与 $\arcsin x$ 的导

④ $\frac{ax+b}{\sqrt[\alpha]{cx+d}}$ 先化为 $k\cdot(cx+d)^{1-\alpha}+h\cdot\frac{1}{\sqrt[\alpha]{cx+d}}$

再利用幂的n阶导公式

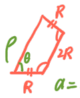
$z=e^{ax+ibx}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$

$\mathrm{Im}\, z=e^{ax}\sin(bx+c)$

$z^{(n)}=(a+ib)^n e^{ax+ibx}$

$=(\sqrt{a^2+b^2})^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)\, e^{ax+ibx}$

$=e^{ax}(\sqrt{a^2+b^2})^n[\cos(bx+n\varphi)+i\sin(bx+n\varphi)]$



$a = 2R$

$$\rho = 2R\cos\theta + 2R = a(1+\cos\theta)$$

$$\begin{cases} x = a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = a(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

不定积分.

基本 a^2 与 x^2 型

- 分母
  - 带根
    - $+$：$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$
    - $-$：
      - $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C$
      - $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
  - 不带根
    - $+$：$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$
    - $-$：
      - $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$
      - $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$
- 分子
  - 带根
    - $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{1}{2}a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$
    - $-$：
      - $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{1}{2}a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C$
      - $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a} + C$
  - 不带根（多项式积分）

基本指对型

- $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$　　$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$
- $\int \log_a x\,dx = \frac{1}{\ln a}(x\ln x - x) + C$　　$\int \ln x\,dx = (x\ln x - x) + C$

基本三角函数型.

- 非反三
  - $\sin x$：$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$　　$\cos x$：$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
  - $\tan x$：$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$　　$\cot x$：$\int \cot x = \ln|\sin x| + C$
  - $\sec x$：$\int \sec x = \ln|\cot\frac{x}{2}| + C$　　$\csc x$：$\int \csc x = \ln|\tan\frac{x}{2}| + C$
  - *替 → $\tan\frac{x}{2} = \csc x - \cot x$，$\cot\frac{x}{2} = \sec x + \tan x$
- 反三
  - $\arcsin x$：$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$　　$\arccos x$：$\int \arccos x\,dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$
  - $\arctan x$：$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$　　$\operatorname{arccot} x$：$\int \operatorname{arccot} x\,dx = x\operatorname{arccot} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

分式函数

程序一：先判断是真分式还是假分式，若为假则化为整＋真

程序二：Plan A.凑微分

- 整体次数奇 ⟶ 大概率可凑，① x 与 ② $\frac{1}{x}$（上下同除最高阶）试　③ $\frac{du}{2\sqrt{u}} = d\sqrt{u}$ 试
- 整体次数偶 ⟶ 大概率不可凑，但可与 a^2 与 x^2 型联系.

程序三：

- 有理函数
  - 有 x^4？⟶ 大概率配对 x^2 与 1　用 $u = x \pm \frac{1}{x}$ 换.
  - 无 → 若实数根，因式分解为 $\frac{A_1}{(x-\alpha)} + \dots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \dots + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)} + \dots + \frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s} + \dots$
    - 快捷分解
      - A_k 确定 → 左右同乘 $(x-a)^k$ 令 $x=a$
      - $M_s A_1$ 确定 → 左右同乘 x. 令 $x \to +\infty$
      - $N_1 \dots N_s$ 确定 → 令 $x = 0$
    - 慢拆通解　确定其中一个. 慢慢拆.
    - 循环聚焦于 $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$
    - 先变成 $\underbrace{a_1 \cdot \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx}_{\text{可积、}} + \int \frac{a_2}{(x^2+px+q)^n}dx$
    - 利用 $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$ 递推. 分部后裂项
- 无理函数
  - $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$ 令 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
  - $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})$ 令 $t = \sqrt[n]{ax+b}$
  - $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ 欧拉代换
    - 若 $a>0$. 则令 $t = \sqrt{a}x \pm \sqrt{ax^2+bx+c}$，$t^2 - 2\sqrt{a}xt - (bx+c) = 0$
    - 若 $c>0$ 则令 $xt = \sqrt{c} \pm \sqrt{ax^2+bx+c}$，$xt^2 - 2\sqrt{c}t - (ax+b) = 0$
    - 若 $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}$ 则令 $t = \sqrt{\frac{a(x-\beta)}{(x-\alpha)}}$　$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)\cdot t$
  - 合适时也可三角换元
    - $\sqrt{x^2-a^2} \to x = a\sec t$　　$\sqrt{a-x} \to x = a\cos t$
    - $\sqrt{a^2-x^2} \to x = a\sin t$　　$\sqrt{a+x} \to x = a\cos t$
    - $\sqrt{a^2+x^2} \to x = a\tan t$　　$a_1<a_2$，$\sqrt{\frac{a_1+x}{a_2+x}} \to a_1+x = \frac{a_2-a_1}{2}(1-\cos t)$

三角分式

是否有常数项？

- 无 → 化为 sin、cos 或 sec、tan. 奇次大概率能凑.　$\sec\tan \to d\sec$　$\sec^2 \to d\tan$　$\sin \to d\cos$　$\cos \to d\sin$
- 有
  - 通过三角恒等变化为无常数 → （同上）
  - 看有无配对明显标志
    - 有 → 配对
    - 无
      - $R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x)$ 则让 $\cos x$ 做积分主元.
      - $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ 令 $t = \tan x$
      - $R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos x)$ 则让 $\sin x$ 做积分主元
      - 令 $t = \tan\frac{x}{2}$　$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$　$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$　$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

特殊积分典例

例1　$I = \int \frac{dx}{1+x^4}$

$I = \int \frac{dx}{1+x^4}$　$J = \int \frac{x^2dx}{1+x^4}$

$$\begin{cases} I+J = \int \frac{(1+x^2)dx}{1+x^4} = \int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right) + C_1 \\ I-J = \int \frac{1-x^2dx}{1+x^4} = \int \frac{d(x+\frac{1}{x})}{-(x+\frac{1}{x})^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{x+\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+1}{\frac{x+\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}-1}\right| + C_2 \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + C$$

例2 $I=\int x^2\sqrt{x^2+1}\,dx$

解1. $I=\frac{1}{2}\int x\sqrt{x^2+1}\,dx^2=\frac{1}{2}\int\sqrt{x^4+x^2}\,dx^2=\frac{1}{2}\int\sqrt{(x^2+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}\,d(x^2+\frac{1}{2})$

$=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}(x^2+\frac{1}{2})\sqrt{(x^2+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\ln\left(x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{(x^2+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}\right)\right]+C$

$=\frac{1}{4}(x^2+\frac{1}{2})\sqrt{x^4+x^2}-\frac{1}{16}\ln\left(x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2}\right)+C$

解2. $I\xlongequal[dx=\sec^2t\,dt]{令x=\tan t}\int\tan^2t\cdot\sec t\cdot\sec^2t\,dt=\int(\sec^2t-1)\sec^3t\,dt=\int\sec^5t\,dt-\int\sec^3t\,dt$

$I_n=\int\sec^nt\,dt=\sec^{n-2}t\tan t-\int\tan t(n-2)\sec^{n-3}t\cdot\sec t\tan t=\sec^{n-2}t\tan t-(n-2)I_n+(n-2)I_{n-2}$

$I_n=\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}+\frac{1}{n-1}\sec^{n-2}t\tan t$ $\quad I_5=\frac{3}{4}I_3+\frac{1}{4}\sec^3t\tan t$ $\quad I=-\frac{1}{4}I_3+\frac{1}{4}\sec^3t\tan t$

$I_3=\frac{1}{2}I_1+\frac{1}{2}\sec t\tan t=\frac{1}{2}\ln|\sec t+\tan t|+\frac{1}{2}\sec t\tan t$

$I=-\frac{1}{8}\ln|\sec t+\tan t|-\frac{1}{8}\sec t\tan t+\frac{1}{4}\sec^3t\tan t+C$

$=-\frac{1}{8}\ln|\sqrt{x^2+1}+x|-\frac{1}{8}\sqrt{x^2+1}\cdot x+\frac{1}{4}(x^2+1)\cdot x\sqrt{x^2+1}+C$

$=-\frac{1}{8}\ln|\sqrt{x^2+1}+x|+\frac{1}{8}(2x^3+x)\sqrt{x^2+1}+C$

例3 $I=\int x f'(x)\,dx\rightarrow$ 标志

$I=\int x\,df(x)=xf(x)-\int f(x)\,dx$

例4. $I=\int\frac{\sin x\,dx}{2\sin x+3\cos x}$

$J=\int\frac{\cos x\,dx}{2\sin x+3\cos x}$ $\quad\begin{cases}2I+3J=\int 1\cdot dx=x+C_1\\ 2J-3I=\int\frac{d(2\sin x+3\cos x)}{2\sin x+3\cos x}=\ln|2\sin x+3\cos x|+C_2\end{cases}$

$I=\frac{2}{13}x-\frac{3}{13}\ln|2\sin x+3\cos x|+C$

定积分.

定义与概念

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义

Step1. 分割　$a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ 为 $[a,b]$ 的一个分割　$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$　$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$ 为此分割细度

Step2. 取介点　取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 则 $\{\xi_i\}$ 为分割的介点集

Step3. 近似求和　取 $f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$　　$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

Step4. 取极限　$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ 对于 $\lambda<\delta$ 的每个分割, 以及每个介点集

成立 $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right|<\varepsilon$

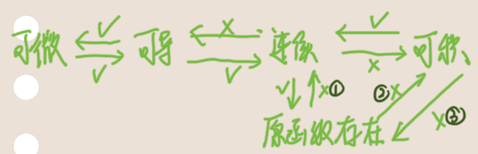
$\Leftrightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上 Rieman 可积 (可积)　$f\in R[a,b]$

三类可积函数

① $f\in C[a,b] \Rightarrow f\in R[a,b]$

② f 在 $[a,b]$ 上有界, 只有有限个间断点 $\Rightarrow f\in R[a,b]$

③ f 在 $[a,b]$ 上单调 $\Rightarrow f\in R[a,b]$



① $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$
区间 $[-a,a]$ $f(x)$ 不连续

② $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

$f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^2}\cos\frac{1}{x^2} & x\ne 0\\ 0 \end{cases}$

区间 $[-a,a]$ $f(x)$ 无界

③ $f(x)=\operatorname{sgn}x$　$[-a,a]$
可积, 但有第一类间断点

可积必要条件

① $f\in R[a,b] \Rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 有界 (无界不可积)

性质.

① 线性运算　$g(x),f(x)\in R[a,b] \Rightarrow \alpha f(x)+\beta g(x)\in R[a,b]$　$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]=\alpha\int_a^b f(x)+\beta\int_a^b g(x)$

② 区间可加　$\int_a^b f(x)+\int_b^c f(x)=\int_a^c f(x)$　　$\int_a^c f(x)-\int_b^c f(x)=\int_a^b f(x)$

③ 正定性　$f(x)\in C[a,b]$　$f(x)\ge 0$. 则 $\int_a^b f(x)dx\ge 0$ 当且仅当 $f(x)\equiv 0$ 等号成立.

(1) $f(\xi_i)\Delta x_i\ge 0 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\ge 0 \Rightarrow \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\ge 0$

(2) 假设 $\exists\ a<c<b$　$f(c)>0$ (也就是 $f(x)\not\equiv 0$)

$\exists[\alpha,\beta]\in[a,b]$　$f(x)>0$ (若 $a<c<b$ 则取 $(c-\delta,c+\delta)$ 去极端)

则精选取充分靠近, $\int_a^b f(x)dx=\int_a^\alpha f(x)dx+\int_\alpha^\beta f(x)dx$

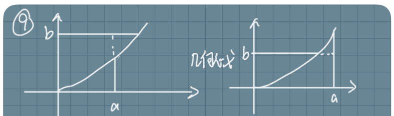
$+\int_\beta^b f(x)dx \ge \int_\alpha^\beta f(x)dx \ge \int_\alpha^\beta \min\limits_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)\,dx = \min\limits_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)$

$\cdot(\beta-\alpha)>0.$

推论　$g(x),f(x)\in R[a,b]$ 且 $f(x)\ge g(x)$ 则　$\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$

$g(x),f(x)\in C[a,b]$ 且 $f(x)\ge g(x)$　$g(x)\not\equiv f(x)$ 则 $\int_a^b f(x)dx>\int_a^b g(x)dx$

⑨



Pf: 设 $a<f^{-1}(b)$

$I=\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy$

$=\int_0^a f(x)dx+\int_0^{f^{-1}(b)} x\,df(x)$

$=\int_0^a f(x)dx + xf(x)\Big|_0^{f^{-1}(b)}-\int_0^{f^{-1}(b)} f(x)dx$

$=f^{-1}(b)\cdot b+\int_{f^{-1}(b)}^a f(x)dx$

$=f^{-1}(b)\cdot b-\int_a^{f^{-1}(b)} f(x)dx$

$\ge f^{-1}(b)\cdot b-[f^{-1}(b)-a]\cdot b=ab$

$a>f^{-1}(b)$ 时同理

④ 积分第一中值定理.

$f(x),g(x)\in C[a,b]$ 且 $g(x)$ 不变号.

那么存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

$m\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le M\int_a^b g(x)dx$　再介值性可知.

特别地 $g(x)$ 为常值函数时可积为 $C\cdot(b-a)$

积分第二中值定理.

$f(x),g(x)\in C[a,b]$ 且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调.

那么存在 $\xi\in[a,b]$ 使 $\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_\xi^b f(x)dx$

只证明 $g(x)$ 可微的情况. 设 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$　$F'(x)=f(x)$

$\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b g(x)dF(x)=g(x)F(x)-\int_a^b F(x)g'(x)dx$

$=g(b)\int_a^b f(t)dt-\underbrace{F(\xi)\int_a^b g'(x)dx}_{\text{积中}}=g(b)\int_a^b f(t)dt-F(\xi)(g(b)-g(a))$

$=g(b)\left(\int_a^b-\int_a^\xi\right)f(x)dx+g(a)\int_a^\xi f(x)dx$

$=g(b)\int_\xi^b f(x)dx+g(a)\int_a^\xi f(x)dx$

⑤ Schwarz 积分不等式

$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$ ⟶ 单个区间内使用 Cauchy 即可证明.

⑥ 绝对值不等式

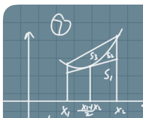
$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$

⑦ Hadamard 不等式

$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的凸连续函数. $\forall x_1<x_2\in(a,b)$

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

⑦



可见几何意义: $S_1<S_2<S_3$.

这一类题型都可按中值定理做
但此处统一种凹凸分析总结.

Pf: 左边: $\frac{1}{2}[f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+f(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1)]$

$\ge f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\Rightarrow\frac{1}{2}\int_0^1[f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+f(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1)]d\lambda$

$=\int_0^1 f(\lambda(x_2-x_1)+x_1)d\lambda=\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\ge f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

右边: $f(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1)\le\lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1)$

$\int_0^1 f(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1)d\lambda\le\int_0^1\lambda f(x_2)d\lambda+\int_0^1(1-\lambda)f(x_1)d\lambda$

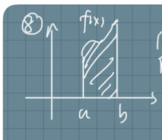
$\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\le\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$

⑧ 质心中值不等式

$f(x)\in C[a,b]$ 单增, 则有

$\int_a^b xf(x)dx\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$

⑧



几何意义: 该均匀板的质心横坐标在 $\frac{a+b}{2}$ 右

$\frac{\int_a^b x\cdot(f(x)dx)}{\int_a^b f(x)dx}\ge\frac{a+b}{2}$

Pf: 即证 $\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx\ge 0$

$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx$

$+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx\ge$

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx=0$

⑨ Young 不等式　$ab\le\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy$　($f(0)=0$　$[a,+\infty)$ 连续可导, $a,b>0$)

微积分学基本定理

变上限积分可导定理

① $f(x)\in C(I)$，$a\in I$

$\Rightarrow$ 则 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$，$x\in I$. 在 I 上可导.

$\Rightarrow$ 且 $F'(x)=f(x)$.

pf: $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{\int_a^{x+h}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}=\frac{\int_x^{x+h}f(t)dt}{h}$

$=f(\xi_h)\frac{h}{h}=f(\xi_h)$. $\xi_h\in(x,x+h)$.

$\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to0}f(\xi_h)=f(x)$.

导数变式：$\left[\int_{v(x)}^{u(x)}f(t)dt\right]'=u'(x)f(u(x))-v'(x)f(v(x))$

$\left(\int_x^a f(t)dt\right)'=-f(x)$.

Newton-Leibniz 公式.

① $f(x)\in C[a,b]$.

$\Rightarrow$ 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在原函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt+C$.

$\Rightarrow$ $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$

原函数积分与函数积分间的关系.

$f(x)\in C[0,+\infty)$ 则有

$\int_0^a\left(\int_0^x f(t)dt\right)dx=\int_0^a f(x)(a-x)\,dx$.

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ $\int_0^a F(x)dx=xF(x)\Big|_0^a-\int_0^a xf(x)dx$

$=a\int_0^a f(t)dt-\int_0^a xf(x)dx=\int_0^a(a-x)f(x)dx$

周期函数的原函数.

$f(x)$ 为周期函数. 周期为 T. $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

可表示为一个线性函数和一个周期函数之和.

$F(x)=\underbrace{x\cdot\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt}_{\text{个线函}}+\underbrace{\left[\int_0^x f(t)dt-\frac{x}{T}\int_0^T f(t)dt\right]}_{g(x)=\ \text{个周函}}$

$g(x+T)=\int_0^x f(t)dt+\int_x^{x+T}f(t)dt-\left(1+\frac{x}{T}\right)\int_0^T f(t)dt=g(x)$.

Euler 积分.

(1) $I=\int_0^\pi\ln(1+\cos x)\,dx$ $\quad$ (1) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\ln(1+\cos x)+\ln(1-\cos x)]\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$.

(2) $I=\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}\,dx$ $\quad$ $=\int_0^\pi\ln 2\sin^2\frac{x}{2}\,dx=\pi\ln2+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt$

$I=\pi\ln2+2I$ 故 $I=-\pi\ln2$

(3) $I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$. $\quad$ (2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}+\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2x}\right)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2x}dx$

(4) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\tan^\alpha x}$ $\quad$ $=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\cos x}{1+\cos^2x}=-\pi\arctan\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}$

(3). $I=\int_0^1\ln(1+x)\,d\arctan x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left[\ln(1+\tan x)+\ln\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)\right]dx=\frac{\pi}{8}\ln2$.

(4) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{dx}{1+\tan^\alpha x}+\frac{dx}{1+\frac{1}{\tan^\alpha x}}\right]$

$=\frac{\pi}{4}$.

定积分的计算

① 对称性的运用.

$\int_a^b f(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_a^b[f(a+b-t)+f(t)]\,dt.=\int_a^b f(a+b-t)\,dt$

$=\int_a^{\frac{a+b}{2}}(f(a+b-t)+f(t))\,dt=\int_{\frac{a+b}{2}}^b(f(a+b-t)+f(t))\,dt$

② 换元的运用.

① 凑无穷小量.

例1. $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{t} & t\neq0\\ 1 & t=0\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

求 $F'(0)$

解：不连续. 故不能使用变上限求导.

$F(0)=0$ $x\neq0$ 时 $F(x)=\int_0^x\sin\frac{1}{t}\,dt$.

$=\int_0^x t^2\left(-\frac{1}{t^2}\right)\sin\frac{1}{t}\,dt=\int_0^x t^2\,d\cos\frac{1}{t}$

$=t^2\cos\frac{1}{t}\Big|_0^x-\int_0^x 2t\cos\frac{1}{t}\,dt$

$F'(0)=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x 2t\cos\frac{1}{t}dt}{x}$

$=-\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x g(t)dt}{x}$ $\quad g(t)=\begin{cases}2t\cos\frac{1}{t} & t\neq0\\ 0 & t=0\end{cases}$ 连续

$F'(0)=\lim_{x\to0}g(x)=0$.

注意用 $\sin\frac{1}{t}\,dt$ 的分部

凑不够小量

第一项只有 $\sin\frac{1}{t}$. 不够多.

说明要想办法凑 t^2.

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ln\sin x\,dx$. $\quad +\frac{1-\sin^2x}{\sin x}$

解：$I=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,d\cos x$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,d(1-\cos x)$

$=(1-\cos x)\ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\frac{\cos x}{\sin x}dx$

$=0+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\cos x)\cos x}{\sin^2x}\,d\cos x$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\cos x}\,d\cos x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{1+\cos x}\right)d\cos x$

$=\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\ln(1+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=-1+\ln2$

然而此时分部会导致

$\cos x\underbrace{\ln\sin x}_{\to-\infty}$ 在0处无极限.

故要凑一个小量 $1-\cos x$.

让它成为小量.

② 含 ln 的可尝试用三角换元.

③ 利用 $t=2x$ 换元

③. 递推法.

递推公式的常见导出法：① 降次后分部 ② 分部升次. ③ 裂项、和项. (加减法).

重要积分 I. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$.

$I_n=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\,d\cos x=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2x\,dx$

$=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n\Rightarrow I_n=\frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2}$

$I_{2n}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot I_0=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$.

$I_{2n+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\cdot I_1=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

由此可导出 Wallis 公式

$I_{2n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,dx$

$\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}dx=I_{2n}$

$I_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}I_{2n-1}\geq\frac{2n}{2n+1}I_{2n}$

$\frac{2n}{2n+1}\leq\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}\leq1$

可知 $\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}=1$.

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}}=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{2n+1}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}=1$

Wallis 公式

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2=\frac{\pi}{2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2\cdot2^{2n}}{(2n)!\cdot\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}$.

重要积分 II. Dirichlet 积分. $D_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx$

$D_n-D_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x}{\sin x}\,dx$.

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{2x}{2}\cos\frac{2n+1+2n-1}{2}x}{\sin x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos2nx\,dx$.

$=\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos2nx\,d2nx=\frac{1}{2n}\int_0^{n\pi}\cos t\,dt=\frac{1}{2n}\cdot n\cdot0=0$

故有 $D_n=D_{n-1}=\cdots=D_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\cdot dx=\frac{\pi}{2}$.

一开始分子是倍数

角形的. 说明要和

差化积. 凑 $\sin x$

消去. 故做差

④ 周期函数的运用.

① $\int_x^{x+T} g(t)\,dt = \int_0^T g(t)\,dt$ ⟶ 推导：$\int_x^{x+T} g(t)\,dt = \int_0^T g(t+T)\,d(t+T) = \int_0^T g(t)\,dt.$

② Riemann 引理以及定理

定理：$\lim\limits_{p\to\infty}\int_a^b f(x)\,g(px)\,dx = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,dt \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

Pf：先证 p 为正整数 n 的情况（然后夹逼即可）. 设 $g(x)$ 非负.

做 $F(x) = \begin{cases} f(x) & x\in[a,b] \\ 0 & x\notin[a,b] \end{cases}$ 取 $[-mT, mT] \supseteq [a,b]$

取 $I = \int_a^b f(x)\,g(nx)\,dx = \int_{-mT}^{mT} F(x)\,g(nx)\,dx$

取 $-mT = x_0 < x_1 < \dots < x_{2mn} = mT$. 令 $x_k - x_{k-1} = \frac{T}{n}$

$I = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2mn}\int_{x_{k-1}}^{x_k} F(x)\,g(nx)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2mn} F(\xi_k)\cdot\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(nx)\,dx$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2mn} F(\xi_k)\cdot\int_0^{\frac{T}{n}} g(nx)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2mn} F(\xi_k)\cdot\frac{1}{n}\int_0^T g(t)\,dt = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{2mn} F(\xi_k)\,\frac{2mT}{2mn}\cdot\int_0^T g(t)\,dt$

$= \left(\int_{-mT}^{mT} F(x)\,dx\right)\cdot\left(\frac{1}{T}\int g(t)\,dt\right) = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\cdot\left(\frac{1}{T}\int g(t)\,dt\right)$

当 $g(t)$ 一般时，取 $G(x) = g(x) - m$. 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,G(nx)\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{T}\int G(t)\,dt\right)$

有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,g(nx)\,dx - m\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,dt - m\int_a^b f(x)\,dx.$

有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,g(nx)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\cdot\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,dt.$

⟶ 这可以导出 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx = 0.$

⑤ 定积分的极限问题.

① $\sqrt[n]{a_1^n + \dots + a_m^n}$ 极限问题的延伸.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_a^b \underbrace{f^n(x)}_{f(x)\text{非负}}\,dx\right)^{\frac{1}{n}} = \max\{f(x) \mid x\in[a,b]\}.$

Pf：记 max 为 M. 则 $\left(\int_a^b f^n(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}} \leq [M^n(a-b)]^{\frac{1}{n}}$
$= M\cdot(a-b)^{\frac{1}{n}}$

另一方面. $\exists\ [\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon] \subset [a,b]$ 使 $M-\varepsilon \leq f(x) \leq M$
（ε, α, β 与 n 无关）. 故对于 $\forall\,\varepsilon$. 都有.

$\left(\int_a^b f^n(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\int_\alpha^\beta f^n(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}} \geq (M-\varepsilon)(\alpha-\beta)^{\frac{1}{n}}$

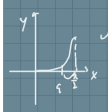
$\lim\limits_{n\to\infty}(M-\varepsilon)(\alpha-\beta)^{\frac{1}{n}} = M-\varepsilon.\ \lim\limits_{n\to\infty} M(\alpha-b)^{\frac{1}{n}} = M.$

$M-\varepsilon \leq \lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}} \leq M$ 由 ε 任意性知极限为 M

② 分段拆解法.

例1. 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx = 0$

Pf：应动态逼近 $\frac{\pi}{2}$ 这个点.



$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$

$\leq \left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\cdot\cos^n\varepsilon \qquad = \varepsilon\cdot\sin^n\xi \to 1$

$\leq \left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)^n$ ⟶ needs使它们为无穷小量.

$\frac{\pi}{2}$

故 $-\frac{1}{2}\varepsilon^2\cdot n = -\infty$. ε^2 比 $\frac{1}{n}$ 更低阶.

取 $\varepsilon = n^{-\frac{1}{3}}$ 故有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2(\sqrt[3]{n})^2}\right)^n = 0.$

故有两项皆趋于 0.

例2. 证 $\lim\limits_{h\to 0^+}\int_{-1}^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,dx = \pi f(0).$

Pf：$\int_{-1}^1 f(x)\frac{h}{h^2+x^2}\,dx = \int_{-1}^1 f(x)\,d\arctan\frac{x}{h}$

要往 0 这个点逼近. 取 $\int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^1$.

$\int_{-1}^{-\varepsilon} f(x)\,d\arctan\frac{x}{h} = f(\xi_1)\cdot\left[\underbrace{\arctan\frac{-\varepsilon}{h}}_{\text{也要}\to-\frac{\pi}{2}} - \arctan\frac{-1}{h}\right] \to -\frac{\pi}{2}$

$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\,d\arctan\frac{x}{h} = f(\xi_2)\cdot\left[\underbrace{\arctan\frac{\varepsilon}{h}}_{\text{要}\to\frac{\pi}{2}} - \arctan\frac{-\varepsilon}{h}\right]$ 要 $\to -\frac{\pi}{2}$

可看出只要 $\frac{\varepsilon}{h}$ 还是无穷大即可.

令 $\varepsilon = \sqrt{h}$

$\lim\limits_{h\to 0^+}\int_{-1}^{\varepsilon} f(x)\,d\arctan\frac{x}{h} = f(\xi_1)\cdot\left[\arctan\frac{-1}{\sqrt{h}} - \arctan\frac{1}{h}\right]$

$= 0\quad \lim\limits_{h\to 0^+}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\,d\arctan\frac{x}{h} = f(0)\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \pi f(0)$

反常积分.

敛散性判别法.

①总述. $f(x)$ 与 $g(x)$ 为非负连续函数.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda \quad \left(\lim_{\substack{x\to b\\(+-)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda\right)$$

(i) $0<\lambda<+\infty$, 则 I_g 与 I_f 同敛散.

(ii) $\lambda=0$. 那么 I_g 收敛 $\Rightarrow$ I_f 收敛

(iii) $\lambda=+\infty$ 那么 I_g 发散 $\Rightarrow$ I_f 发散.

② 绝对与条件收敛.

$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛 $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

令 $0\le g(x)=f(x)+|f(x)|\le 2|f(x)|$ 即可.

③ $0\le f(x)\le g(x)$. 若, I_g 敛 $\Rightarrow$ I_f 敛

I_f 发 $\Rightarrow$ I_g 发.

④ $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$. $(a>0)$ $\begin{cases} p>1 & 收敛\\ p\le 1 & 发散\end{cases}$

⑤ $\int_a^b\frac{1}{(x-a)^p}dx$ $\begin{cases} p<1 & 收敛\\ p\ge 1 & 发散\end{cases}$ $\longrightarrow$ 须说在 $p>0$ 才是广义积分

⑥. $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^\beta(\ln x)^\alpha}dx$ $(a>0)$

$\begin{cases} \beta>1 & 收敛\\ \beta=1 & \begin{cases}\alpha>1 & 收敛\\ \alpha\le1 & 发散.\end{cases}\\ \beta<1 & 发散.\end{cases}$

⑦ $\int_a^{+\infty}e^{ax}dx$ $\begin{cases} a<0 & 收敛\\ a\ge 0 & 发散\end{cases}$

反常积分的求解.

分部, 换元, 凑微分适用. (须挂电).

Γ函数. $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$.

性质① $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ $\Rightarrow\Gamma(n+1)=n!$

② $\Gamma(\frac{1}{2})=2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$.

③ $\Gamma(s)\,\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}$ $(0<s<1)$

不等式.

1. 二元均值 $(a\neq b)$ $a>b$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \frac{a+b}{2} > \frac{a-b}{\ln a-\ln b} > \sqrt{ab} > \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

① $\frac{1}{a-b}(\ln a-\ln b) > \frac{1}{\left(\frac{a+b}{2}\right)}$

即 $f(x)=\frac{1}{x}$ 上凹

$\frac{1}{a-b}\int_b^a f(x) > f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 导出

② $\frac{e^{\ln a}-e^{\ln b}}{\ln a-\ln b} > e^{\frac{\ln a+\ln b}{2}}$

$f(x)=e^x$ 上凹

$\frac{1}{\ln a-\ln b}\int_{\ln b}^{\ln a} e^x > f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 导出.

③ $f(x)=\sqrt{x}$ 上凸

$f\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right) > \frac{1}{2}f(a^2)+\frac{1}{2}f(b^2)$

即 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$.

④ $f(x)=e^x$ 上凹

$e^{\frac{-\ln a-\ln b}{2}} < \frac{1}{2}e^{-\ln a}+\frac{1}{2}e^{-\ln b}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{ab}} < \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

2. 广义均值.

$\lambda_1x_1+\dots+\lambda_nx_n \geqslant x_1^{\lambda_1}\cdot\dots\cdot x_n^{\lambda_n}$ $(x_1\dots x_n>0.\ \lambda_1+\dots+\lambda_n=1)$

取对数 $\ln(\lambda_1x_1+\dots+\lambda_nx_n) \geqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\ln x_i$

即 $f(x)=\ln x$ 的琴生. (上凸)

$f(\lambda_1x_1+\dots+\lambda_nx_n) \geqslant \lambda_1f(x_1)+\dots+\lambda_nf(x_n)$