

2016-2017 学年第一学期期中考试试卷参考答案

1、【正解】 $2x^3 - 6x^2 + 4x$

【解析】

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & x^2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & x^2 - x \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & x^3 - x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & x^2 - x \\ 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & x^3 - x \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & x^2 - x \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & x^3 - x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & x^2 - x \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & x^3 - x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & x^2 - x \\ 6 & x^3 - x \end{vmatrix} = 2x^3 - 6x^2 + 4x
 \end{aligned}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 2: 行列式的展开

$$2、【解析】 \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & -2 & -4 & 3 & 7 \\ 2 & -2 & 4 & -7 & 4 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

 $\therefore R(A) = R(\bar{A}) = 3 < 5$ (未知数个数) \therefore 有无穷解

$$\therefore \text{可得} \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 - 3x_5 = -2 \\ 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ -3x_4 + 9x_5 = 6 \end{cases}$$

由 $n-3=2$ 知有两个自由向量: 取 x_3, x_5 为自由未知量, 令 x_3, x_5 都为 0, 得特解 $\left(-4, \frac{5}{2}, 0, -2, 0\right)^T$ 分别令 $x_3=0, x_5=1$ 和 $x_3=1, x_5=0$ 求得通解 $k_1\left(-4, \frac{7}{2}, 0, -2, 0\right)^T + k_2(2, 0, 0, 1, 1)^T$ 所以解为: $k_1\left(-4, \frac{7}{2}, 0, -2, 0\right)^T + k_2(2, 0, 0, 1, 1)^T + \left(-4, \frac{5}{2}, 0, -2, 0\right)^T$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17: 非齐次线性方程组

3、【解析】(1) 矩阵的秩是其非零子式的最高阶数, 向量组的秩是其最大无关组所含的向量个数。

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 2\lambda & \lambda+4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 可知其秩为 } 3$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9: 矩阵的秩及矩阵等价

4、【正解】
$$\begin{bmatrix} -2 & \frac{7}{2} \\ 3 & -5 \\ -7 & \frac{25}{2} \end{bmatrix}$$

【解析】 $A \times B = C, \therefore A^{-1}A \times BB^{-1} = A^{-1}CB^{-1}, \therefore X = A^{-1}CB^{-1}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & -3 \end{array} \right]$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 16 \\ -15 & 27 \\ 14 & -25 \end{bmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5: 矩阵的逆

5、【正解】
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

【解析】

$$12E = 2BA - A^*BA, \therefore A \cdot \frac{2B - A^*B}{12} = E, \therefore A^{-1} = \frac{2B - A^*B}{12}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}, \therefore A^* = |A|A^{-1}, \text{ 即 } A^{-1} = \frac{(2 - |A|A^{-1})}{12}B$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ 可得 } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, |A| = -2$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{2E + 2A^{-1}}{12} B, \text{解得 } B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5: 矩阵的逆

6、【正解】 $\begin{bmatrix} B^{-1} \\ A^{-1} \end{bmatrix}$

【解析】

$\because A, B$ 均可逆, $\therefore |A| \neq 0, |B| \neq 0$

$$G = \begin{bmatrix} & A \\ B & \end{bmatrix}, \therefore |G| = \begin{vmatrix} & A \\ B & \end{vmatrix} = -|A| |B| \neq 0$$

$$\therefore G \text{ 可逆}, \therefore GG^{-1} = E, \therefore G^{-1} = \begin{bmatrix} & B^{-1} \\ A^{-1} & \end{bmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 7: 分块矩阵

7、【解析】(1) 如进行行变换,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A$$

(2) $|A| \neq 0$, 则说明 A 满秩, 则 A 可逆; A 可逆, 则说明 A 必满秩, 则 $|A| \neq 0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 8: 初等矩阵

【招募学霸兼职】

用你最擅长的学科知识, 做最完美的答案解析。

哟哟

【征集各科资料】

分享你手里的真题、作业习题或者笔记, 我们将回馈一份感谢。



你在帮助学弟学妹的同时, 还能赚取一笔丰厚的零花钱!

请联系 QQ: 1760880175

2016-2017 学年第二学期期中考试试卷参考答案

1、【解析】

$$D = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & y & y \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = x \cdot y \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} \cdot xy = x^2 y^2$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 3——几种特殊的行列式

2、【解析】

$$A_{11} + 2A_{12} + \cdots + nA_{1n} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$= (2-n)n!$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 2——行列式展开

3、【解析】易知: $\bar{A} \xrightarrow{\text{行变换}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+2)(1-\lambda) \end{array} \right]$, 则有如下:

①当 $\lambda \neq -2$ 且 $\lambda \neq 1$ 时, $R(A) \neq R(\bar{A})$, 故无解;②当 $\lambda = 1$ 时, $R(A) = R(\bar{A}) = 1 < n$ (未知数个数), 故有无穷多解. 此时解为 $\mathbf{X} = (1-s-t, s, t)^T$.③当 $\lambda = -2$ 时, $R(A) = R(\bar{A}) = 2 < n$, 有无穷多解. 此时易求得解为 $\mathbf{X} = (-1, -1-k, k)^T$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17——非齐次线性方程组

4、【解析】矩阵的秩是非零子式的最高阶数.

当 x_1, x_2, \dots, x_n 都不为零时, $R(A) = n, R(A^*) = n$;当 x_1, x_2, \dots, x_n 只有一个为零时, $R(A) = n-1, R(A^*) = 1$;当 x_1, x_2, \dots, x_n 至少有两个为零时, $R(A) < n-1, R(A^*) = 0$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9——矩阵的秩和矩阵等价

5、【解析】 $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17——非齐次线性方程组

6、【解析】

$$\begin{aligned}
&\because \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 + ar_2} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1 + c_2} \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1 - ac_2} \\
&\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{a}-1 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2 - c_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{a}-1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1 - (\frac{1}{a}-1)c_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\therefore \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-\frac{1}{a} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\therefore \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-\frac{1}{a} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1+\frac{1}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点8——初等矩阵

7、【解析】

$$\text{设 } A = P \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q$$

$$\begin{aligned}
\because A^2 = A &\Rightarrow P \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q P \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q = P \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q \\
&\Rightarrow \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (QP) \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\text{分 } QP = \begin{bmatrix} C_{r \times r} & F \\ G & H \end{bmatrix} \Rightarrow C_{r \times r} = E_r$$

$$\begin{aligned}
\text{tr } A &= \text{tr} \left(P \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q \right) = \text{tr} \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} QP = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{r \times r} & F \\ G & H \end{bmatrix} \right) \\
&= \text{tr} \begin{bmatrix} C_{r \times r} & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{tr } C_{r \times r} = \text{tr } E_r = r
\end{aligned}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点9——矩阵的秩和矩阵等价

$$8、【解析】 A + 2B = AB \Rightarrow A = (A - 2E)B \Rightarrow E = (A - 2E)BA^{-1} \therefore (A - 2E)^{-1} = BA^{-1}, \square.$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点5——矩阵的逆

2017-2018 学年第一学期期中考试试卷参考答案

1、【解析】

当 $z=y$ 时, $D_n=[x+(n-1)y](x-y)^{n-1}$ 当 $z \neq y$ 时,

$$D_n \xrightarrow{\text{拆第一列}} \begin{vmatrix} z & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-y & y & y & \cdots & y \\ 0 & x & y & \cdots & y \\ 0 & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= z(x-y)^{n-1} + (x-z)D_{n-1} \quad (1)$$

$$D_n \xrightarrow{\text{拆第一行}} \begin{vmatrix} y & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-y & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= y(x-z)^{n-1} + (x-y)D_{n-1} \quad (2)$$

$$\Rightarrow D_n = \frac{z(x-y)^n - y(x-z)^n}{z-y}.$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 3——几种特殊的行列式

2、【解析】

$$D = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k-1)^2(k-2)$$

 $\therefore D \neq 0$ 时, 即当 $k \neq 1$ 且 $k \neq 2$ 时

$$\text{有唯一解: } x_1 = \frac{k-1}{k+2}, x_2 = x_3 = \frac{-3}{k+2}$$

当 $k=2$ 时, $R(A) = 2 \neq R(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ 方程组无解;

当 $k=1$ 时 $R(A) = R(\bar{A}) = 1 \Rightarrow$ 方程组无穷多组解, 并且 $\begin{cases} x_1 = -2 - t_1 - t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_2 \end{cases}$, 其中 $t_1, t_2 \in P$.

$$\therefore \bar{A} = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & \vdots & k-3 \\ 1 & k & 1 & \vdots & -2 \\ 1 & 1 & k & \vdots & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & \vdots & -2 \\ 1 & k & 1 & \vdots & -2 \\ k & 1 & 1 & \vdots & k-3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & \vdots & -2 \\ 0 & k-1 & 1-k & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & (1-k)(2+k) & \vdots & 3(k-1) \end{bmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17——非齐次线性方程组

$$3、【解析】 X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17——非齐次线性方程组

4、【解析】

$$A = P \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q, \text{ 取 } B = Q^{-1} \begin{bmatrix} O & O \\ O & E_{n-r} \end{bmatrix}$$

则有: $R(B) = n - r$ 且 $AB = 0, \square$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9——矩阵的秩和矩阵等价

5、【解析】

$$(1) A = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} Q = P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [1 \ 0 \ \cdots \ 0] Q = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{bmatrix} [q_{11} \ q_{12} \ \cdots \ q_{1n}]$$

$$(2) A^2 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{bmatrix} \left([q_{11} \ q_{12} \ \cdots \ q_{1n}] \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{bmatrix} \right) [q_{11} \ q_{12} \ \cdots \ q_{1n}]$$

$$= (q_{11} p_{11} + \cdots + q_{1n} p_{n1}) A = kA.$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点——秩 1 矩阵的性质

6、【解析】令 $\bar{A} = [A|d], \bar{B} = [B|c]$ 则有: $R(\bar{A}) = R(A), R(\bar{B}) = R(B) + 1,$

$$R(G) = R(AdBc) = R(\bar{A}\bar{B}) \leq R(\bar{A}) + R(\bar{B}) = R(A) + R(B) + 1.$$

$$(\text{其中: } R(A) + R(B) = R \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} A & AB \\ O & B \end{bmatrix} \geq R(AB))$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17——非齐次线性方程组

7、【解析】有: $\because \begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2 - c_1(A^{-1}D)} \begin{bmatrix} A & O \\ C & B - CA^{-1}D \end{bmatrix}$ 证明, 当 A 可逆时,

$$\therefore \begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & -A^{-1}D \\ 0 & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B - CA^{-1}D \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} = |A| |B - CA^{-1}D| = |A(B - CA^{-1}D)| = |AB - ACA^{-1}D| = |AB - CD|$$

当 A 不可逆时, 即 $|A| = 0$, 令: $f(x) = |xE + A| = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$.

则总存在一个实数 Z , 当 $x \geq Z$ 时, $f(x) \neq 0$. 此时 $xE + A$ 可逆, 故有如下:

$$\because AC = CA \therefore (xE + A)C = C(xE + A) \therefore \begin{vmatrix} xE + A & D \\ C & B \end{vmatrix} = |(xE + A)B - CD|$$

等式俩边为关于 x 的多项式, 常数项相等(即当 $x = 0$), $\therefore \begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} = |AB - CD|$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 7——分块矩阵

2017-2018 学年第二学期期中考试试卷参考答案

一、选择题(每小题 4 分, 共 32 分)

1、【正解】 $2x^4 - x^3 - 7x^2 + 12x - 8$

【解析】

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -x & 1-2x & 2-2x^2 \\ 1 & x-1 & 0 & -1-x \\ 3 & -1 & x-3 & 1-3x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -x & 1-2x & 2-2x^2 \\ x-1 & 0 & -1-x \\ -1 & x-3 & 1-3x \end{vmatrix} \\
 &= - \begin{vmatrix} -x & -x^2+x+1 & x^2-x+2 \\ x-1 & x^2-4x+3 & -3x^2+3x-2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x^2+x+1 & x^2-x+2 \\ x^2-4x+3 & -3x^2+3x-2 \end{vmatrix} \\
 &= 2x^4 - x^3 - 7x^2 + 12x - 8
 \end{aligned}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 2: 行列式的展开

2、【正解】 $n \prod_{i=1}^n x_i$

【解析】

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}, \text{ 则}$$

$$x_1 A_1 = x_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = x_1 x_2 x_3 \cdots x_n$$

 $x_i A_i$ 与 $x_1 A_1$ 类似, 都等于 $x_1 x_2 x_3 \cdots x_n$

$$\text{故 } x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + \cdots + x_n A_n = n \prod_{i=1}^n x_i$$

3、【正解】 $\lambda = -2$ 时, 无解; $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时, 唯一解: $x_1 = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2}, x_2 = \frac{1}{\lambda+2}, x_3 = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$; $\lambda = 1$, 无穷多解: $x_1 = 1-s-t, x_2 = s, x_3 = t$

$$\text{【解析】} \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3 \end{array} \right]$$

当 $\lambda = -2$ 时, $R(A) = 2$, $R(\bar{A}) = 3$, $R(A) \neq R(\bar{A})$ 无解

当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时, $R(A) = 3$, $R(\bar{A}) = 3$, $R(A) = R(\bar{A}) = n$, 此时有唯一解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \\ (\lambda - 1)x_2 + (1 - \lambda)x_3 = \lambda - \lambda^2 \\ (2 - \lambda - \lambda^2)x_3 = 1 + \lambda - \lambda^2 - \lambda^3 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x_1 = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2} \\ x_2 = \frac{1}{\lambda+2} \\ x_3 = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \end{cases}$$

当 $\lambda = 1$ 时, $R(A) = R(\bar{A}) = 1 < n$, 此时有无穷多解。

$$\text{此时 } x_1 + x_2 + x_3 = 1, \text{ 令 } x_2 = s, x_3 = t, \text{ 得 } \begin{cases} x_1 = 1 - s - t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17: 非齐次线性方程组

4、【正解】

$$n=2 \text{ 时 } \begin{cases} x \neq 0, r((A^*)^*) = 2 \\ x = 0, r((A^*)^*) = 1 \end{cases}$$

$$n>2 \text{ 时 } \begin{cases} x \neq 0, r((A^*)^*) = n \\ x = 0, r((A^*)^*) = 0 \end{cases}$$

【解析】

$$n=2 \text{ 时, } x=0, r(A)=1=n-1, \therefore r(A^*)=1=n-1, \therefore r((A^*)^*)=1$$

$$x \neq 0, r(A)=2=n, \therefore r(A^*)=2=n, \therefore r((A^*)^*)=2$$

$$n>2 \text{ 时, } x=0, r(A)=n-1, \therefore r(A^*)=1 < n-1, \therefore r((A^*)^*)=0$$

$$x \neq 0, r(A)=n, \therefore r(A^*)=n, \therefore r((A^*)^*)=n$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9: 矩阵的秩及矩阵等价

5、【正解】(1) $1 - 2018(a_{34})^2 \neq 0$

$$\text{【解析】(1) 设 } A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix}, E + AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{13} & 2018a_{14} \\ 0 & 1 & a_{23} & 2018a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 2018a_{34} \\ 0 & 0 & a_{34} & 1 \end{bmatrix}$$

可知 $|E + AB| = 1 - 2018(a_{34})^2$, 若 $E + AB$ 可逆, 则 $1 - 2018(a_{34})^2 \neq 0$

(2)

$$\begin{aligned} ((E + AB)^{-1}A)^T &= A^T((E + AB)^{-1})^T = A((E + AB)^T)^{-1} = A(E + BA)^{-1} \\ &= ((E + BA)A^{-1})^{-1} = (A^{-1} + B)^{-1} = (A^{-1}(E + AB))^{-1} = (E + AB)^{-1}A \end{aligned}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5: 矩阵的逆

6、【解析】 $\because A^{2018} = 0, \therefore |A|^{2018} = 0$, 可知 $|A| = 0$

当 $R(A) = 0$ 时, 此时 $A = 0, A^2 = 0$

当 $R(A) = 1$ 时, 此时 $A^2 = a_{11}AA^{2018} = a^{2017}A = 0$

$\therefore a_{11} = 0, A^2 = a_{11}A = 0$

$$7、\text{【解析】} \because \begin{bmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

$$\therefore R(M) = R \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} = R(A) + R(D - CA^{-1}B) = n + R(D - CA^{-1}E)$$

可知 $R(M) = n$ 时, $D = CA^{-1}B$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5: 矩阵的逆

8、【解析】 $\because A^3 = 2E, \therefore A^3 - E = (A - E)(A^2 + A + E) = E, (A - E)^{-1} = A^2 + A + E$

$$B = A^2 - 2A + E = (A - E)^2$$

$$\therefore B^{-1} = ((A - E)^2)^{-1} = ((A - E)^{-1})^2 = (A^2 + A + E)^2 = 3A^2 + 4A + 5E$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5: 矩阵的逆

2018-2019 学年第一学期期中考试 A 卷参考答案

$$1、【解析】 D = \begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+x \end{vmatrix} \quad (n \geq 2)$$

$$\begin{array}{c} r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ \cdots \\ r_n-r_1 \end{array} \begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & \cdots & a_n \\ -x & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} C_1+C_2 \\ C_1+C_3 \\ \cdots \\ C_1+C_n \end{array} \begin{vmatrix} a_1+a_2+\cdots+a_n+x & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= x^{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_n+x)$$

$$n=1 \text{ 时, } D=a_1+x, \text{ 符合上式, 故 } D=x^{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_n+x)$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 1-3——行列式的展开.

$$2、【解析】 \text{根据定义} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和

由于 $j=i_r$ 时, $a_{rj}=1$, 否则 $a_{rj}=0$

$$\text{得 } |A| = a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)}$$

$$= (-1)^{\tau(\sigma)}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 1—— n 阶行列式定义.

$$3、【解析】 \tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 1-\lambda & 0 & \lambda-1 & 0 \end{array} \right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ 或 } \lambda = -2$$

① $\lambda \neq 1, -2$ 时, $r(\tilde{A}) = r(A) = 3$, 有唯一解

$$\text{解得 } x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\lambda + 2}$$

② $\lambda = 1$ 时, $r(\tilde{A}) = r(A) = 1 < 3$, 有无穷多解

同解方程组为 $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$$\text{令 } x_2 = t, x_3 = s, \text{ 则 } \begin{cases} x_1 = 1 - s - t \\ x_2 = t \\ x_3 = s \end{cases} \quad (s, t \text{ 为任意实数})$$

$$\textcircled{3} \lambda = -2 \text{ 时, } \tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

此时 $r(\tilde{A}) = 3, r(A) = 2$

即 $r(\tilde{A}) \neq r(A)$

故方程组无解

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17——非齐次线性方程组.

4、【解析】 $AX = A + 2X$

$$(A - 2E)X = A$$

$$X = (A - 2E)^{-1}A$$

$$(A - 2E)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = (A - 2E)^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4——矩阵的概念和基本运算.

5、【解析】设 $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 2c \\ 0 & 0 & d & 2e \\ 0 & 0 & 0 & 2f \\ 0 & 0 & -f & 0 \end{pmatrix}$$

$$|E + AB| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & b & 2c \\ 0 & 1 & d & 2e \\ 0 & 0 & 1 & 2f \\ 0 & 0 & -f & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2f \\ -f & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & 2c \\ d & 2e \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + 2f^2 \neq 0$$

$\Rightarrow E + AB$ 可逆

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5——矩阵的逆.

6、【解析】 $|A| = 0 \Leftrightarrow R(A) \leq n-1$

$$R(A^*) = \begin{cases} 1, & R(A) = n-1 \\ 0, & R(A) < n-1 \end{cases}$$

$$\text{即 } R(A^*) \leq 1$$

故 A^* 的任意一个二阶子式等于零

$$\text{即 } \begin{vmatrix} A_{ii} & A_{ij} \\ A_{ji} & A_{jj} \end{vmatrix} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\Rightarrow A_{ii}A_{jj} - A_{ij}A_{ji} = 0$$

又 A 为 n 阶实对称矩阵

$$\text{所以 } A_{ij} = A_{ji}$$

$$\text{故 } A_{ii}A_{jj} = (A_{ij})^2, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4-9——矩阵的秩与伴随矩阵的秩.

7、【解析】 $P = \begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -E \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & B+A \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -E \\ 0 & E \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{pmatrix}$$

因为初等行(列)的变换不改变矩阵的秩

所以 $R(M) = R(P) \geq R(A+B) + R(A-B)$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9——矩阵的秩和矩阵等价.

8、【解析】由 $B = E + AB$ 得 $(E - A)B = E$

故 B 可逆, 且 $B^{-1} = E - A$

所以 $B(E - A) = E$, 即 $BA = B - E$

又 $AB = B - E \quad \therefore AB = BA$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5——矩阵的逆.

2018-2019 学年第二学期期中考试试卷参考答案

一、解答题

1、【正解】 $|A+E|=0$ 【解析】因 $AA^T=E$, 所以 $|A+E|=|A+AA^T|=|A(E+A^T)|$

$$=|A||E+A^T|=|A|(E+A)^T=|A||A+E|$$

即 $|A+E|(1-|A|)=0$, 因为 $|A|<0$, 所以 $1-|A|>0$, 故 $|A+E|=0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4—矩阵的概念和基本运算.

2、【正解】 $|A|=-1$ 【解析】 $a_{ij}=-A_{ij} \Rightarrow A^*=-A^T \Rightarrow |A^*|=|-A^T|=(-1)^8|A^T|=(-1)^8|A|=|A|$,又 $|A^*|=|A|^{n-1}=|A|^7$, 所以 $|A|^7=|A|$,

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=-(a_{11}^2+a_{12}^2+\cdots+a_{1n}^2)<0, \therefore |A|=-1$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 2—行列式展开; 知识点 4—伴随矩阵.

3、【解析】 $AX=B$ 有解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A:B)$

$$(A:B)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & : & 4 & b \\ 2 & a & : & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & : & 4 & b \\ 0 & a-2 & : & -1 & 1-b \end{pmatrix} \Rightarrow a \neq 2,$$

$$BY=A \text{ 无解} \Leftrightarrow R(B) \neq R(B:A)$$

$$(B:A)=\begin{pmatrix} 4 & b & : & 2 & 2 \\ 3 & 1 & : & 2 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & b-\frac{4}{3} & : & -\frac{2}{3} & 2-\frac{4}{3}a \\ 3 & 1 & : & 2 & a \end{pmatrix} \Rightarrow b=\frac{4}{3}$$

即矩阵方程 $AX=B$ 有解且 $BY=A$ 无解 $\Leftrightarrow a \neq 2$ 且 $b=\frac{4}{3}$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17—非齐次线性方程组.

$$\begin{aligned} 4、【解析】\tilde{A} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & : & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & : & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & : & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & : & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & : & 1+a \\ 1 & 0 & -1 & -1 & : & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & : & b \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & : & 1+a \\ 0 & 1 & -a & 0 & : & 1+a \\ 1 & 0 & -1 & -1 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$R(A) = R(\tilde{A}) \text{ 时方程有解, 此时 } a+1=0, b-a-1=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases}$$

$$\text{此时方程组为 } \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1 \end{cases},$$

$$\text{同解方程组为 } \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 + x_4 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + m + n \\ x_2 = -m \\ x_3 = m \\ x_4 = n \end{cases} \quad (m, n \text{ 为任意实数})$$

$$R(A) \neq R(\tilde{A}) \text{ 时方程无解, 此时 } a \neq -1 \text{ 或 } b \neq 0.$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17—非齐次线性方程组.

5、【解析】(1)(2)(3) 错, 反例 $A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}$

(4) 正确, 证明:

$$\text{当 } |A| \neq 0 \text{ 且 } |B| \neq 0 \text{ 时, } M^* = |M|M^{-1} = |A||B| \begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |B|A^* & \\ & |A|B^* \end{pmatrix} \text{ 成立}$$

$$\text{当 } |A| = 0 \text{ 且 } |B| = 0 \text{ 时, } M^* = 0 \text{ 成立}$$

$$\text{当 } |A| \neq 0 \text{ 且 } |B| = 0 \text{ 时, } M^* = \begin{pmatrix} 0 & \\ & |A|B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |B|A^* & \\ & |A|B^* \end{pmatrix} \text{ 成立}$$

$$\text{当 } |A| = 0 \text{ 且 } |B| \neq 0 \text{ 时, } M^* = \begin{pmatrix} |B|A^* & \\ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |B|A^* & \\ & |A|B^* \end{pmatrix} \text{ 成立}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4—伴随矩阵.

6、【解析】(1) $A+B=AB, A+B+E=AB+E, AB-A-B+E=E, (A-E)(B-E)=E$

$$\text{故 } A-E \text{ 可逆, 且 } (A-E)^{-1} = B-E.$$

$$(2) (A-E)(B-E)=E=(B-E)(A-E) \Rightarrow AB=BA$$

$$(3) A+B=AB \Rightarrow A=(A-E)B, \text{ 由于 } A-E \text{ 可逆, 所以 } r[(A-E)B]=r(B)$$

$$\text{故 } r(A)=r(B)$$

$$(4) A+B=AB \Rightarrow A=B(B-E)^{-1}$$

$$(B-E:E) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (B-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = B(B-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5—矩阵的逆；知识点 9—矩阵的秩.

7、【解析】 $A = P \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q = PQQ^{-1} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$, 令 $B = PQ, C = Q^{-1} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$

$$B \text{ 为可逆矩阵, } C^2 = Q^{-1} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q \cdot Q^{-1} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q = Q^{-1} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q = C$$

故存可逆矩阵 B 和满足 $C = C^2$ 的 C 使得 $A = BC$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 8—初等矩阵.

8、【解析】 $A = \begin{pmatrix} B & \alpha \\ \beta & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - \beta B^{-1} r_1} \begin{pmatrix} B & \alpha \\ 0 & a_{nn} - \beta B^{-1} \alpha \end{pmatrix}$, $\therefore \begin{pmatrix} B & \alpha \\ 0 & a_{nn} - \beta B^{-1} \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\beta B^{-1} & 1 \end{pmatrix} A$

$$\begin{vmatrix} B & \alpha \\ 0 & a_{nn} - \beta B^{-1} \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\beta B^{-1} & 1 \end{vmatrix} |A| \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} B & \alpha \\ 0 & a_{nn} - \beta B^{-1} \alpha \end{vmatrix} = (a_{nn} - \beta B^{-1} \alpha) |B|$$

又 $|A| > 0, |B| > 0$, 所以 $a_{nn} - \beta B^{-1} \alpha > 0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 8—初等矩阵.

2019-2020 学年第一学期期中考试试卷参考答案

一、
【正解】见解析

【解析】将 D_n 按第 1 列展开得 $D_n = 4D_{n-1} - 4D_{n-2} \Rightarrow D_n - 2D_{n-1} = 2(D_{n-1} - 2D_{n-2})$

$$\text{因此 } D_n - 2D_{n-1} = (D_2 - 2D_1)2^{n-2} = (12 - 2 \times 4)2^{n-2} = 2^n$$

$$\text{故 } \frac{D_n}{2^n} - \frac{D_{n-1}}{2^{n-1}} = 1$$

$$\text{故 } D_n/2^n = \frac{D_1}{2} + (n-1) \cdot 1 = \frac{4}{2} + n - 1 = n + 1 \Rightarrow D_n = (n+1)2^n, n \geq 3$$

$$\text{由 } D_1 = 4, D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 12$$

$$\text{故 } D_n = (n+1)2^n, n \geq 1$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 2: 行列式的展开, 知识点 3: 几种特殊的行列式

二、

【正解】 $2^3(1+2^{n-1})$

【解析】由于 $r(A)=1$, 故 $r(A^*)=0$, 所以 $A^*=0$

$$\text{而 } A^2 = \alpha\alpha^T\alpha\alpha^T = \alpha^T\alpha A = 2A, \text{ 故 } A^n = 2^{n-1}A$$

易知 A 的特征值为 $2, 0, 0$

$$\text{因此 } |2E - (A^*)^n + A^n| = |2E + 2^{n-1}A|$$

$$= (2 + 2^{n-1} \cdot 2) \cdot (2 + 2^{n-1} \cdot 0) \cdot (2 + 2^{n-1} \cdot 0) = 2^3(1 + 2^{n-1})$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9: 矩阵的秩和矩阵等价, 知识点 19: 特征值与特征向量

三、

【正解】 $a=15, b=5$

$$\text{【解析】 } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & b - \frac{a}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{由 } r(A)=r(B) \Rightarrow 3b=a$$

$$\text{又 } Ax=(b, 1, 0)^T \text{ 有解, 故 } r(A)=r(A:(b, 1, 0)^T)=2$$

$$\text{而 } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & b \\ 2 & 0 & 6 & 1 \\ -3 & 1 & -7 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{b-5}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{故 } b=5, \text{ 所以 } a=15$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17: 非齐次线性方程组
四、

【正解】见解析

$$\text{【解析】 } (A:b) = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 & : & 1 \\ 0 & a & -3a & : & 3 \\ 1 & 3 & a+1 & : & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4a+7 & : & 3 \\ 0 & 1 & -(a+2) & : & -1 \\ 0 & 0 & a(a-1) & : & a+3 \end{pmatrix}$$

当 $a=0$ 或 $a=1$ 时, $r(A)=2; r(\bar{A})=3, r(A) < r(\bar{A})$, 方程组无解;

当 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$ 时, $r(A)=r(\bar{A})=3$, 方程组有唯一解,

$$\text{原方程化为 } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 3 - \frac{(4a+7)(a+3)}{(a-1)a} \\ 0 & 1 & 0 & : & \frac{(a+2)(a+3)}{(a-1)a} - 1 \\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{a+3}{a(a-1)} \end{pmatrix}$$

$$\text{此时解为 } x = \left(3 - \frac{(4a+7)(a+3)}{(a-1)a}, \frac{(a+2)(a+3)}{(a-1)a}, \frac{a+3}{a(a-1)} \right)^T$$

对 $\forall a \in R$, 该方程组都不存在无穷多组解

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17: 非齐次线性方程组
五、

【正解】见解析

$$\text{【解析】 } A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ k & k & k & k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1-k & 0 & \frac{1-k}{2} \\ 0 & 0 & 1-k & \frac{1-k}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k(1-k)}{2} \end{pmatrix}$$

当 $k=0$ 时, $r(A)=3$;

当 $k=1$ 时, $r(A)=1$;

当 $k \neq 0$ 且 $k \neq 1$ 时, $r(A)=4$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9: 矩阵的秩和矩阵等价

六、

(1)

【正解】见解析

【解析】记 $A=(a_{ij})_{n \times n}$, $B=(b_{ij})_{n \times n}$

$$\text{则 } tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}, \quad tr(B) = \sum_{i=1}^n b_{ii}, \quad A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{n \times n}$$

$$\text{故 } tr(A+B) = \sum_{i=1}^n (a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = tr(A) + tr(B)$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4: 矩阵的概念和基本运算

(2)

【正解】见解析

【解析】记 $A=(a_{ij})_{n \times n}$, $B=(b_{ij})_{n \times n}$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$, $d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$

$$AB=(c_{ij})_{n \times n}, \quad BA=(d_{ij})_{n \times n}$$

$$\text{故 } tr(AB) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}$$

$$tr(BA) = \sum_{i=1}^n d_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ki}b_{ik} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}$$

$$\text{所以 } tr(AB) = tr(BA)$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4: 矩阵的概念和基本运算

(3)

【正解】见解析

【解析】由 (2) 知 $tr(AB) = tr(BA)$

$$\text{因此 } tr(P^{-1}AP) = tr(APP^{-1}) = tr(A)$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4: 矩阵的概念和基本运算

(4)

【正解】见解析

$$\text{【解析】 } tr(A) = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4: 矩阵的概念和基本运算
七、

【正解】见解析

【解析】由于 $\alpha \neq 0, A\alpha = \theta$, 故 $r(A) \leq n-1$

又 $A^*x = \alpha$ 有解

因此 $r(A^*) \neq 0$, 由 A 与 A^* 的秩之间的关系:

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases}$$

故 $r(A^*) \geq 1 \Rightarrow r(A) \geq n-1$, 因此 $r(A) = n-1$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9: 矩阵的秩和矩阵等价, 知识点 16: 齐次线性方程组, 知识点 17: 非齐次线性方程组

八、

【正解】见解析

【解析】①若 $\alpha = 0$ 或 $\beta = 0$, 则 $\alpha\beta^T = 0$, 因此 $|A + \alpha\beta^T| = |A|$, 这是显然的

②若 $\alpha \neq 0$ 且 $\beta \neq 0$, 则 $r(\alpha\beta^T) = 1$, 这是由于 $\alpha\beta^T$ 可看作由 α 张成的线性空间的一个子空间, 且 $\beta \neq 0$, 则该子空间维度为 $\dim\{\alpha\} = 1$

而 A 可逆, 故 $|A + \alpha\beta^T| = |I + \alpha\beta^T A^{-1}| |A| = |A| \left| I + \frac{1}{|A|} \alpha\beta^T A^* \right|$

由于 $r(A) = n$, 故 $r(A^*) = n$, 所以 $r(\alpha\beta^T A^*) = r(\alpha\beta^T) = 1$

又 $\alpha\beta^T A^* \alpha = (\beta^T A^* \alpha) \alpha$, 故 $\beta^T A^* \alpha$ 是 $\alpha\beta^T A^*$ 的一个特征值, 则 $\alpha\beta^T A^*$ 其余特征值为 0

因此 $\left| I + \frac{1}{|A|} \alpha\beta^T A^* \right| = \left(1 + \frac{1}{|A|} \beta^T A^* \alpha \right) \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1 + \frac{1}{|A|} \beta^T A^* \alpha$

所以 $|A + \alpha\beta^T| = |A| \left(1 + \frac{1}{|A|} \beta^T A^* \alpha \right) = |A| + \beta^T A^* \alpha$

综上, 命题得证

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9: 矩阵的秩和矩阵等价, 知识点 15: 向量空间, 知识点 19: 特征值与特征向量

2020-2021 学年第一学期期中考试 A 卷参考答案

一、【解析】有 $D_1 = 4 = \frac{3^{1+1}-1}{2}$, $D_2 = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 13 = \frac{3^{2+1}-1}{2}$, 当 $n \geq 3$ 时, 对 D_n 按第一行展开得到 $D_n = 4D_{n-1} - 3D_{n-2} \Rightarrow D_n - D_{n-1} = 3(D_{n-1} - D_{n-2}) \Rightarrow D_n = D_{n-1} + 3^n$, 求解得 $D_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 3: 几种特殊的行列式

二、【解析】因为 $|B| = -1 \neq 0$, 所以 B 可逆, 由 $2BA + CB = O$ 可得 $A = -\frac{1}{2}B^{-1}CB$, 于是有 $|A + 3E|$

$$= \left| -\frac{1}{2}B^{-1}CB + 3B^{-1}EB \right| = \left| -\frac{1}{2}C + 3E \right| = \begin{vmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{vmatrix} = \frac{35}{2}.$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 2: 行列式的展开

三、【解析】由 $BA = O$ 可得 $A^T B^T = O$, 于是 B^T 的各列均为线性方程组 $A^T x = 0$ 的解, 又因为 B 非零所以 B^T 非零, 故线性方程组 $A^T x = 0$ 有非零解从而可知 $r(A^T) \leq 2$, 即 $|A| = |A^T| = 0$, 从而计算得 $0 = |A| = -(t-6)^2$ 于是 $t = 6$; 又因为 $BA = O$, 所以 $r(A) + r(B) \leq 3$ 又 $r(A) = 1$, 因此 $r(B) \leq 2$, 又 B 非零从而 $r(B) \geq 1$, 于是 B 的秩可能的取值为 1 或 2.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5: 矩阵的秩

四、【解析】因为 $b^2 \neq ac$, 所以系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \\ c & a \end{pmatrix}$ 的秩等于 2, 又增广矩阵

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a & b & -c \\ b & c & -a \\ c & a & -b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & a+b+c \\ b & c & a+b+c \\ c & a & a+b+c \end{pmatrix}$$

由于 $a+b+c=0$, 因此 $r(A) = r(\bar{A}) = 2$, 因此原线性方程组有唯一解, 经计算可得到

$$x_1 = \frac{ab-c^2}{ac-b^2}, \quad x_2 = \frac{bc-a^2}{ac-b^2}.$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17: 非齐次线性方程组

五、【解析】因为 $|A^*| = 8 \neq 0$, 所以 $r(A^*) = 4$, 又 $AA^* = |A|E$, 下用反证法证明 $|A| \neq 0$, 若 $|A| = 0$,

则 $AA^* = O$, 于是 $r(A) + r(A^*) \leq 4$, 从而 $r(A) = 0$, 即 $A = O$, 于是 $A^* = O$, 这与题设矛盾, 故 $|A| \neq 0$, 于是 $|AA^*| = |A|^3 \Rightarrow |A| = 2$, 在方程 $AB = B + 3A$ 两边左乘 A^* 可得 $|A|B = A^*B + 3|A|E$,

从而有 $(2E - A^*)B = 6E$, 于是计算可得 $(2E - A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$, 于是

$$B = 6(2E - A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4-9: 题型 4: 伴随矩阵的计算

六、【解析】(1) 因为 $A^2 = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} = nA$, 所以取 $a = -n$ 可得 $A^2 - nA = O$, 故 $f(x) = x^2 - nx$.

$$(2) A^{100} = nA^{99} = \cdots = n^{99}A = \begin{pmatrix} n^{99} & \cdots & n^{99} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{99} & \cdots & n^{99} \end{pmatrix}.$$

$$(3) (A + E)^3 = (n^2 + 3n + 3)A + E = \begin{pmatrix} n^2 + 3n + 4 & n^2 + 3n + 3 & \cdots & n^2 + 3n + 3 \\ n^2 + 3n + 3 & n^2 + 3n + 4 & \cdots & n^2 + 3n + 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n^2 + 3n + 3 & n^2 + 3n + 3 & \cdots & n^2 + 3n + 4 \end{pmatrix}$$

(4) 设 $(A + E)^{-1} = E + xA$, 其中 x 为待定常数, 由 $(A + E)(E + xA) = E$, 可得 $(1 + xn + x)A = O$,

$$\text{从而 } 1 + x(n+1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{n+1}, \text{ 于是 } (A + E)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{n}{n+1} & -\frac{1}{n+1} & \cdots & -\frac{1}{n+1} \\ -\frac{1}{n+1} & \frac{n}{n+1} & \cdots & -\frac{1}{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{n+1} & -\frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{n}{n+1} \end{pmatrix}.$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4: 矩阵的概念和基本运算

七、【解析】“ \Rightarrow ” 设 $r(A) = r(AB)$, 则 $r(A) = r(AB) = r(AB A)$, 将 A 按列分块得 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$,

则有 $\forall i = 1, \dots, n$, $r(AB) = r(AB, \alpha_i) = r(AB A)$, 从而可知 $\forall i = 1, \dots, n$, 线性方程组 $ABx = \alpha_i$ 有解

β_i , 令 $C = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, 则有 $ABC = A$

“ \Leftarrow ” 若存在方阵 C 使得 $A = ABC$, 则有 $r(A) = r(ABC) \leq r(AB) \leq r(A)$, 所以 $r(AB) = r(A)$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9: 矩阵的秩和矩阵等价

八、【解析】设 A 的秩为 r , 则存在可逆方阵 B, Q 使得 $A = B \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$, 又因为 B 可逆, 所以 B^T 也可逆, 因此 $A = B \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q = B \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} B^T (B^T)^{-1} Q$, 令 $S = B \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} B^T, P = (B^T)^{-1} Q$, 可知 $S^T = S$, 即 S 为对称矩阵, 又 $(B^T)^{-1}$ 可逆, Q 可逆, 故 P 可逆, 于是存在对称矩阵 S 和可逆矩阵 P 使得 $A = SP$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5: 矩阵的逆

浙江大学 2020-2021 学年 春夏 学期

《线性代数（甲）》课程期中考试答案

一、(10 分) 设 $x \neq 2$ 为实常数, 有 n 阶行列式如下,

$$D_n = \begin{vmatrix} x & 4 & 4 & \cdots & 4 & 4 \\ 1 & x & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & x & 2 & 2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & \cdots & 2 & x & 2 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & x \end{vmatrix}$$

试证明: $\forall n \in \mathbb{Z}^+, D_n = [x + 2(n-1)](x-2)^{n-1}$.

证明:

当 $n=1$ 时, $D_1 = x = [x + 2(1-1)](x-2)^{1-1}$, 即此时等式成立。

当 $n=2$ 时, $D_2 = \begin{vmatrix} x & 4 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x^2 - 4 = (x+2)(x-2) = [x + 2(2-1)](x-2)^{2-1}$, 即此时等式成立。

假设当 $n=k-1$ 时等式成立, 即 $D_{k-1} = [x + 2(k-2)](x-2)^{k-2}$, 而

当 $n=k$ 时,

$$\begin{aligned} D_k &= \begin{vmatrix} x & 4 & \cdots & 4 & 0 \\ 1 & x & \cdots & 2 & 0 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & & & & \\ 1 & 2 & \cdots & 2 & x-2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 4 & \cdots & 4 & 4 \\ 1 & x & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \cdots & & & & \\ 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (x-2)D_{k-1} + \begin{vmatrix} x-2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & x-2 & 0 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (x-2)D_{k-1} + 2(x-2)^{k-1} \\ &= [x + 2(k-2)](x-2)^{k-2} + 2(x-2)^{k-1} \\ &= [x + 2(k-1)](x-2)^{k-1} \end{aligned}$$

二、(10 分) 设 A 为三阶方阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 已知 $|A| = \frac{1}{2}$, 试求 $|(3A)^{-1} - 2A^*|$ 的值.

解: 因为 $|A| = \frac{1}{2} \neq 0$, 所以 A 可逆, 而 $(3A)^{-1} = \frac{1}{3}A^{-1}$, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = 2$, 又 $A^* = |A|A^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1}$, 故

$$|(3A)^{-1} - 2A^*| = \left| \frac{1}{3}A^{-1} - A^{-1} \right| = \left| -\frac{2}{3}A^{-1} \right| = \left(-\frac{2}{3} \right)^3 |A^{-1}| = -\frac{16}{27}.$$

三、(15 分) 设 $\alpha \neq 1$ 是一个实常数, 又已知其次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$$

与方程 $x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$ 有公共解, 试求 a 的值以及所有的公共解.

解: 方程 $x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$ 的通解为 $c_1(-2, 1, 0)^T + c_2(-1, 0, 1)^T + (a - 1, 0, 0)^T = (-2c_1 - c_2 + a - 1, c_1, c_2)^T$ (其中 c_1, c_2 为任意实数) 代入方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} c_1 = a - 1, \\ (a - 1)(c_2 + 1) = 0, \\ (a - 1)[3 + (a + 1)c_2] = 0, \end{cases} \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = -1, a = 2.$$

进而 $a = 2$ 符合题意, 此时方程组与方程有公共解为 $(0, 1, -1)^T$

四、(20 分) 当实数 a 取何值时线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = a^2 \end{cases}$$

无解、有解? 有解时求出所有解.

线性方程组的增广矩阵为

$$\bar{A} = (A, b) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 & a^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & a^2 + \frac{a-a^2}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{a-a^2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & a^2 + a - 2 \end{pmatrix}$$

于是有,

当 $a^2 + a - 2 \neq 0$ 时, 即 $a \neq 1$ 且 $a \neq -2$ 时, 由于 $r(\bar{A}) = 2 \neq 3 = r(A)$, 原方程组无解;

当 $a^2 + a - 2 = 0$ 时, 即 $a = 1$ 或 $a = -2$ 时, 由于 $r(\bar{A}) = 2 = 2 = r(A)$, 原方程组有解:

$$\text{当 } a = 1, \bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 通解为 } \begin{cases} x_1 = 1 + t_1 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_1 \end{cases}$$

$$\text{当 } a = -2, \bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 通解为 } \begin{cases} x_1 = 2 + t_2 \\ x_2 = 2 + t_2 \\ x_3 = t_2 \end{cases}$$

五、(10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$, 其中 k 为实常数, 试求 A 的秩 $r(A)$.

可以经过初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & 1-k \end{pmatrix}$$

故当 $k=1$ 时, $r(A)=1$; 当 $k \neq 1$ 时, $r(A)=3$.

或经过初等列变换

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} k-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 & 1 \end{pmatrix}$$

故当 $k=1$ 时, $r(A)=1$; 当 $k \neq 1$ 时, $r(A)=3$.

六、(15 分) 设 a, b 是两个实常数, $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $f(x) = (x-b)^8$,

试求矩阵 $f(A)$, 试给出 $f(A)$ 可逆的条件, 并且当 $f(A)$ 可逆时求其逆 $[f(A)]^{-1}$.

由题意知, $A = aE + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 令 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A = aE + B$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^3 = O$.

于是有

$$\begin{aligned} f(A) &= (A - bE)^8 = (B + (a-b)E)^8 \\ &= (a-b)^8 E + 8(a-b)^7 B + 28(a-b)^6 B^2 \\ &= \begin{pmatrix} (a-b)^8 & 8(a-b)^7 & 28(a-b)^6 \\ 0 & (a-b)^8 & 8(a-b)^7 \\ 0 & 0 & (a-b)^8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

于是可得 $|f(A)| = (a-b)^{24}$. 从而若要 $f(A)$ 可逆, 仅需 $|f(A)| \neq 0$, 从而当 $a \neq b$ 时, $f(A)$ 可逆, 此时

$$[f(A)]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(a-b)^8} & \frac{-8}{(a-b)^9} & \frac{36}{(a-b)^{10}} \\ 0 & \frac{1}{(a-b)^8} & \frac{-8}{(a-b)^9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{(a-b)^8} \end{pmatrix}$$

七、(15 分) (1) 设 A 是一个 n 阶可逆矩阵, 若已知 A 的每一行元素之和都是常数 c , 试证明: $c \neq 0$;

(2) 设 A, B 是 n 阶方阵, 试证明:

$$r(AB + A + B) \leq r(A) + r(B);$$

(3) 设 A, B 是 n 阶方阵, 试证明: 若 $E + AB$ 可逆, 则 $E + BA$ 也可逆.

(1) 由于 A 可逆, 故 $|A| \neq 0$, 将行列式 $|A|I$ 中的后 $n-1$ 列全部加至第一列, 那么此时第一列的元素全部为 c , 即 $|A| = c \times$ 常数, 由于 $|A| \neq 0$, 故 $c \neq 0$.

(2) 由于

$$\begin{pmatrix} A & A+B \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & O \\ E & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB+A+B & O \\ B & O \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned} r(AB + A + B) &\leq r\left(\begin{pmatrix} AB+A+B & O \\ B & O \end{pmatrix}\right) \\ &= r\left(\begin{pmatrix} A & A+B \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & O \\ E & O \end{pmatrix}\right) \\ &\leq r\left(\begin{pmatrix} A & A+B \\ O & B \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

又

$$r\left(\begin{pmatrix} A & A+B \\ O & B \end{pmatrix}\right) = r(A) + r(B)$$

故结论成立

(3) 由于 $E + AB$ 可逆, 记 $C = (E + AB)^{-1}$, 于是 $(E + AB)C = E$. 于是有 $C + ABC = E$, 两边同时左乘 B , 右乘 A 得, $BCA + BABCA = BA$. 即

$$(BA + E)BCA = BA,$$

两边同时减去 $BA + E$, 得

$$(BA + E)(E - BCA) = E.$$

由定义可知 $E + BA$ 也可逆.

八、(5 分) 试证明任何一个方阵可表示为一个可逆矩阵和一个幂等矩阵的乘积. (若方阵 $A^2 = A$ 则称 A 是一个幂等矩阵)

证明: 设 B 是任意给定的一个方阵, 若 B 是一个零矩阵, 则结论成立.

下设 $B \neq O$, 并设 $r(B) = r \neq 0$, 则存在可逆矩阵 P, Q , 使得 $PBQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

令 $A = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 则 $A^2 = A$, 于是有 $B = P^{-1}AQ^{-1} = P^{-1}Q^{-1}QAQ^{-1}$,

再令 $R = P^{-1}Q^{-1}, C = QAQ^{-1}$, 则 R 是一个可逆矩阵, C 满足 $C^2 = C$ 即 C 为幂等矩阵, 故结论成立. 证毕.

2021-2022 学年第一学期期中考试 A 卷参考答案

一、

【解析】(1) $D_1 = |7| = 7$; $D_2 = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 49 - 6 = 43$.

(2) 当 $n \geq 3$ 时, 对 D_n 按照第一行展开得到 $D_n = 7D_{n-1} - 6D_{n-2}$, 若当 $n \leq k$ 时有 $D_n = \frac{6^{n+1}-1}{5}$, 则当 $n = k+1$ 得到

$$D_{k+1} = 7D_k - 6D_{k-1} = 7 \cdot \frac{6^{k+1}-1}{5} - 6 \cdot \frac{6^k-1}{5} = \frac{7 \cdot 6^{k+1} - 6^{k+1} - 7 + 6}{5} = \frac{6^{k+2}-1}{5}.$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 3: 几种特殊的行列式

二、【解析】有 $|B|=1$, 说明 B^{-1} 可逆, 结合 $BA = B^T B$ 即可得到 $A = B^{-1} B^T B$, 对 $BA = B^T B$ 取行

列式得到 $|A| = |B| = 1$, 那么说明 A 可逆, 则 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = A^*$, 于是

$$|A^* - 2E| = |A^{-1} - 2E| = |A| |A^{-1} - 2E|$$

$$= |E - 2A| = |B^{-1}B - 2B^{-1}B^T B| = |B^{-1}| |E - 2B^T| |B| = |E - 2B^T|, \text{ 有 } E - 2B^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

因此 $|A^* - 2E| = |E - 2B^T| = -1$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5: 矩阵的逆

三、【解析】由 $A^2 = A$ 可以得到 $A(A-E) = O$, 那么有

$$r(A) + r(A-E) = r(A) + r(E-A) \geq r(A+E-A) = r(E) = n$$

另一方面 $r(A) + r(A-E) = r \begin{pmatrix} A & O \\ O & A-E \end{pmatrix} \leq r \begin{pmatrix} A & E \\ O & A-E \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & E \\ A & A \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} O & E \\ O & O \end{pmatrix} = n$, 综上所述得到 $r(A) + r(A-E) = n$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4: 矩阵的概念和基本运算

四、【解析】(1) 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$;

$$(2) A \xrightarrow[r_4-2r_1]{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+r_2]{r_3+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

(3) 由(2)可以得到 $r(A) = 3$;

(4)在(2)的基础上把 A 化行最简形得到 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 得到方程组 $\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$, 得到方程组的通

$$\text{解为 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k \text{ 为任意常数.}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 16: 齐次线性方程组

五、【解析】有 $|A^*|=1$, $AA^*=|A|E$, 那么得到 $|AA^*|=|A|^3 \Rightarrow |A|^2=1 \Rightarrow |A|=1$, 因此 $A^{-1}=$

$$\frac{A^*}{|A|} = A^*, \text{ 又 } AB = E + 3A \text{ 且 } A \text{ 可逆, 则 } B = A^{-1}(E + 3A) = A^{-1} + 3E = A^* + 3E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4-9: 题型 4: 伴随矩阵的计算

$$\text{六、【解析】(1) } A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 1 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix};$$

$$(2) A^3 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 1 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 27 & 9 \\ 0 & 27 & 27 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix};$$

(3) A 的特征多项式为 $f(\lambda) = (\lambda - 3)^3 = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 27\lambda - 27$, 设 $\lambda^{100} = f(\lambda)q(\lambda) + a\lambda^2 + b\lambda + c$, 根

据哈密顿-凯莱定理得到 $f(A) = O$, 且 $f(3) = f'(3) = f''(3) = 0$, 则 $\begin{cases} 3^{100} = 9a + 3b + c \\ 100 \cdot 3^{99} = 6a + b \\ 100 \cdot 99 \cdot 3^{98} = 2a \end{cases}$, 求解得

$$\text{到 } \begin{cases} a = 550 \cdot 3^{100} \\ b = -9800 \cdot 3^{99} \\ c = 539 \cdot 3^{102} \end{cases}, \text{ 则 } A^{100} = 550 \cdot 3^{100} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 6 & 1 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} - 9800 \cdot 3^{99} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + 539 \cdot 3^{102} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3^{100} & 100 \cdot 3^{99} & 4950 \cdot 3^{98} \\ 0 & 3^{100} & 100 \cdot 3^{99} \\ 0 & 0 & 3^{100} \end{pmatrix}.$$

$$(4) A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{27} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(5)由(2)中的特征多项式得到 $a = -9$, $b = 27$, $c = -27$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4: 矩阵的概念和基本运算

七、【解析】在这个行列式的展开式中,除去主对角线上的乘积为奇数,其余各项都至少有主对角元素下方的元素为因子,而主对角线下的元素均为偶数,因此行列式 A 的值必为奇数,从而 $|A| \neq 0$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 2: 行列式的展开

八、【解析】由 $r(A)=r>0$ 得,存在可逆矩阵 P, Q ,使得 $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$,从而 $A = P^{-1} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1}$,

$$\begin{aligned} \text{令 } B &= Q^{-1} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1}, \text{ 于是 } AB = AQ \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1} = P^{-1} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1} Q^{-1} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1} \\ &= P^{-1} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1}, \text{ 且 } r(B)=r, \text{ 令 } C = P^{-1} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} P, \text{ 于是 } CA = P^{-1} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} PP^{-1} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1} \\ &= P^{-1} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1}, \text{ 且 } r(C)=r, \text{ 故存在存在秩为 } r \text{ 的实方阵 } B \text{ 和 } C \text{ 使得 } AB=CA. \end{aligned}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5: 矩阵的秩

发现错误怎么办

反馈有奖



扫码或联系QQ: 1152296818

本资料编者都是学长学姐,虽然仔细核对了很多遍,但可能会有一些疏漏,诚恳希望学弟学妹们积极反馈错误,我们会及时更正在二维码里哦(づ3づ)