

浙江大学 2016-2017 学年 秋冬 学期

《线性代数（甲）》课程期中考试试卷

一. (本题 10 分) 试计算行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & x^2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & x^3 \end{vmatrix}.$$

二. (本题 15 分) 解齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 1, \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 7, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 + 4x_5 = 1. \end{cases}$$

三. (本题 15 分)

(1) 试叙述矩阵秩的定义.

(2) 设 λ 可取任意参数, 试求矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 2\lambda & \lambda + 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩.

四. (本题 15 分) 试求解矩阵方程 $AXB=C$ 的解, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

五. (本题 15 分) 已知 $A^*BA = 2BA - 12E$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 B .

六. (本题 15 分) 试证明 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & C \end{pmatrix}$ 可逆并求其逆, 这里 A, B 分别为 r 阶和 s 阶

可逆矩阵.

七. (本题 15 分)

(1) 试证明对矩阵 A 实施一次初等行变换等价于用相应的初等矩阵左乘 A .

(2) 试证明方阵 A 可逆的充分必要条件是 $|A| \neq 0$.

浙江大学 2016-2017 学年 春夏 学期

《线性代数 (甲)》课程期中考试试卷

一. (本题 10 分) 计算下列行列式的值.

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}, \text{其中 } x, y \text{ 为任意实常数.}$$

二. (本题 15 分) 设有 n 阶行列式如下 ($n \geq 2$ 为正整数):

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}, \text{其中 } x_1, x_2, \cdots, x_n \text{ 为任意实常数,}$$

试求 $A_1 + 2A_2 + \cdots + nA_n$ 的值, 其中 A_1, A_2, \cdots, A_n 分别是 x_1, x_2, \cdots, x_n 在行列式 D 中的代数余子式.

$$\text{三. (本题 15 分) 当 } \lambda \text{ 取何值时, 线性方程组 } \begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = 1 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = \lambda \end{cases} \text{ 无解? 有解? 有解}$$

时求该线性方程组的所有解.

四. (本题 15 分) 试叙述矩阵秩的定义; 设有 n ($n \geq 2$ 为正整数) 阶矩阵如下:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-1} \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{其中 } x_1, x_2, \cdots, x_n \text{ 为任意实常数,}$$

试求 A 的伴随矩阵 A^* 的秩.

五. (本题 15 分) 求解下述矩阵方程:

$$X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

六. (本题 10 分)

设 $a \neq 0$ 为实常数, 试把矩阵 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$ 表示成 $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$ 型矩阵的乘积.

七. (本题 10 分) n (n 为正整数) 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的主对角线上元素之和 $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ 称为方阵 A 的迹, 记作 $\text{tr} A$. 现设方阵 A 的秩为 r 且满足 $A^2 = A$, 试证明: $\text{tr} A = r$.

八. (本题 10 分) 设 A, B 为 n (n 为正整数) 阶方阵且满足 $A + 2B = AB$, 试证明: $A - 2E$ 可逆.

浙江大学 2017-2018 学年 秋冬 学期

《线性代数（甲）》课程期中考试试卷

1.(15), 计算n阶行列式:

$$\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}, x, y, z \text{ 为任意实常数}$$

2, (20) 设k为实常数, 当k为何值时,

下面线性方程组无解? 唯一解?

无穷多解? 有解时, 求解。

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = k - 3 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = -2 \end{cases}$$

3.(20)求矩阵方程

$$x \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

4, (15), 设 $R(A_{n \times n}) = r$, 证明存在 $B_{n \times n}$,

且 $R(B) = n - r$, 使得 $AB = 0$

5.(15). $R(A_{n \times n}) = 1$, $A_{n \times n} \in P^{n \times n}$, 证明:

1, 存在两组不全为零的实数

$a_1, \cdots, a_n; b_1, \cdots, b_n$, 使得:

$$A = (a_1, \cdots, a_n)^T (b_1, \cdots, b_n)$$

2, 存在实数k, 使得 $A^2 = kA$

6, (8) 设 $A_{m \times n} X_{n \times 1} = d_{m \times 1}$ 有解,

$B_{m \times s} X_{s \times 1} = c_{m \times 1}$ 无解,

$$\text{令 } G = (ABdc)_{m \times (n+s+2)}$$

证明, $R(G) \leq R(A) + R(B) + 1$

7, (10) 设 $A, B, C, D \in R^{n \times n}$, 证明: 当 $AC = CA$ 时

$$\text{有: } \begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} = |AB - CD|$$

浙江大学 2017-2018 学年 春夏 学期

《线性代数（甲）》课程期中考试试卷

1(10) 计算 $D = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$

2(15) 设 $D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$, 求 $x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n$
其中: A_i 为 x_i 的代数余主式

3(15) 设 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$

λ 取什么值时无解?

唯一解? 无穷多解?

有解时求其解。

4(15) A 为 n 阶矩阵 ($n \geq 2$), $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 求 $r((A^*)^*)$

5(15) 设 A 是对角线上元素全为零的 4 阶实对称可逆矩阵

$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2018 \end{bmatrix}$

(1) A 中元素满足什么条件时, $E + AB$ 可逆。

(2) 当 $E + AB$ 可逆时, 证明 $(E + AB)^{-1}A$ 是对称矩阵。

6(10) 设 $A_{2 \times 2}^{2018} = 0$. 证明: $A^2 = 0$

7(10), 设 A, B, C, D 为 n 阶方阵, A 可逆, $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

证明, $R(M) = n \Leftrightarrow D = CA^{-1}B$

8(10) 设 n 阶方阵 A 满足 $A^3 = 2E, B = A^2 - 2A + E$, 证明 B 可逆, 并求 B^{-1}

浙江大学 2018-2019 学年 秋冬 学期

《线性代数（甲）》课程期中考试试卷

$$1(15) D = \begin{vmatrix} a_1 + x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n + x \end{vmatrix}$$

2(15) 设 $\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_n)$ 是一个 n 阶排列, $A = [a_{rj}]$ 是一个 n 阶方阵, 并且 A 中元素满足对于每个固定 r , 当 $j = i_r$ 时, $a_{rj} = 1$, 否则 $a_{rj} = 0$, 求 $|A|$

$$3(15) \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases} \quad \text{问, 当 } \lambda \text{ 取什么值时, 方程组无解? 唯一解? 无穷多解? 有解时求解。}$$

$$4(15), \text{ 设 } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 求矩阵方程: } AX = A + 2X$$

$$5(15) \text{ 设 } A \text{ 为 } 4 \text{ 阶反对称矩阵, } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ 证明, } E + AB \text{ 可逆}$$

6(10), 设 A 为 n 阶实对称矩阵 ($n > 1$), $|A| = 0$, 证明, $A_{ii}A_{jj} = (A_{ij})^2, (i, j = 1, 2, \cdots, n)$

$$7(7), A, B \in P^{n \times n}, M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}, \text{ 证明: } R(M) \geq R(A+B) + R(A-B)$$

8(8) 设 $A, B \in P^{n \times n}$, 满足 $B = E + AB$, 证明: $AB = BA$

浙江大学 2018-2019 学年 春夏 学期

《线性代数（甲）》课程期中考试试卷

- 1、设A是一个2019阶实方阵，满足 $AA^T = E, |A| < 0$, 求 $|A + E|$
- 2、设A是一个8阶实方阵，满足 $a_{ij} = -A_{ji}$, 其中 $a_{11} \neq 0$, 求 $|A|$
- 3、设实方阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & b \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, 证明矩阵方程 $AX = B$ 有解且 $BY = A$ 无解 $\Leftrightarrow a$
- 4、当实数a,b取什么值时，方程组
$$\begin{cases} -x_2 + ax_3 = 0 \\ -ax_1 + x_2 + ax_4 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - ax_3 = b \end{cases}$$
 无解，有解，有解时求解
- 5、 $A, B \in R^{2 \times 2}, M = \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}$, 判断下面4个等式，正确给出证明，不正确给出反例
 - (1) $M^* = \begin{bmatrix} |A| A^* & \\ & |B| B^* \end{bmatrix}$
 - (2) $M^* = \begin{bmatrix} |B| B^* & \\ & |A| A^* \end{bmatrix}$
 - (3) $M^* = \begin{bmatrix} |A| B^* & \\ & |B| A^* \end{bmatrix}$
 - (4) $M^* = \begin{bmatrix} |B| A^* & \\ & |A| B^* \end{bmatrix}$
- 6、 $A, B \in P^{n \times n}$, 且满足 $A + B = AB$, 证明:
 - (1) $A - E$ 可逆
 - (2) $AB = BA$
 - (3) $r(A) = r(B)$
 - (4) 如 $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 求A
- 7、 $A \in P^{n \times n}$, 证明存在可逆矩阵B 和满足 $C = C^2$ 的C, 使得 $A = BC$
- 8、 $A = [a_{ij}]_{n \times n}, (n \geq 2), A = \begin{bmatrix} B & \alpha \\ \beta & a_{nn} \end{bmatrix}$, 如果 $|A| > 0, |B| > 0$, 证明 $a_{nn} - \beta B^{-1} \alpha > 0$

浙江大学 2019-2020 学年 秋冬 学期

《线性代数（甲）》课程期中考试试卷

一. (本题 10 分) 设有下列 n 阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & \dots \\ & & & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix},$$

试证明: $D_n = (1+n)2^n$.

二. (本题 10 分) 设 $\alpha = (1, 0, -1)^T$, 矩阵 $A = \alpha\alpha^T$. 又设 n 为一正整数, 试求 $|2E - (A^*)^n + A^n|$.

三. (本题 15 分) 设有实方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 a, b 为实常数. 已知 $r(A) = r(B)$, 且线性方程组 $AX = (b, 1, 0)^T$ 有解, 试求 a, b 的值.

四. (本题 20 分) 当实数 a 取何值时线性方程组
$$\begin{cases} -x_1 - 4x_2 + x_3 = 1 \\ ax_2 - 3ax_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + (a+1)x_3 = 0 \end{cases}$$
无解, 有唯一解, 有无穷解? 有解时请求出所有解.

五. (本题 15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ k & k & k & k \end{pmatrix}$, 其中 k 为实常数, 试求 A 的秩 $r(A)$.

六. (本题 20 分) 设 A, B 为 n 阶方阵, 试证明:

(1) $tr(A+B) = trA + trB$;

(2) $tr(AB) = tr(BA)$;

(3) 设 P 是一个 n 阶可逆矩阵, 则有 $tr(P^{-1}AP) = trA$;

(4) 若 $A = E_{ij}$, 其中 E_{ij} 是第 i 行第 j 列处的元素为1, 其余元素为全部为零的 n 阶方阵, 试求 trA .

七. (本题 5 分) 设 A 是一个 $n(\geq 2)$ 阶方阵. A^* 是 A 的伴随矩阵. 若存在 n 维非零列向量 α 使得 $A\alpha = \theta$, 其中 θ 为 n 维零列向量, 且非齐次线性方程组 $A^*X = \alpha$ 有解, 试证明: $r(A) = n-1$.

八. (本题 5 分) 设 A 为 n 阶可逆矩阵. α, β 为两个 n 维列向量, 试证明: $|A + \alpha\beta^T| = |A| + \beta^T A^* \alpha$.

浙江大学 2020-2021 学年 秋冬 学期

《线性代数（甲）》课程期中考试试卷

一. (本题 10 分) 设 $D_n = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -3 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}$, 试证明: $D_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$.

二. (本题 10 分) 设 $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 三阶方阵满足方程 $2BA + CB = O$, 其中 O 为三阶零方阵, 试求 $|A + 3E|$.

三. (本题 15 分) 设有实方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & t & 9 \end{pmatrix}$, 其中 t 为实常数, 已知 B 为三阶非零方阵且满足 $BA = O$, 其中 O 为三阶零方阵, 试求 t 的值以及 B 的秩的可能取值.

四. (本题 15 分) 设 a, b, c 为实常数, 且满足 $b^2 \neq ac, a + b + c = 0$, 试证明线性方程组 $\begin{cases} ax_1 + bx_2 + c = 0 \\ bx_1 + cx_2 + a = 0 \\ cx_1 + bx_2 + b = 0 \end{cases}$ 有唯一解并求出这个唯一解.

五. (本题 15 分) 设方阵 A 的伴随矩阵为 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, 已知矩阵 B 满足 $AB = B + 3A$, 试求矩阵 B .

六. (本题 20 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$.

- 求 (1) 一个二次实系数多项式 $f(x) = x^2 + ax$ 使得 $f(A)$ 为二阶零方阵;
 (2) A^{100} ;
 (3) $(A + E)^3$;
 (4) $(A + E)^{-1}$.

七. (本题 8 分) 设 A, B 是两个 n 阶实方阵, 试证明: $r(A) = r(AB)$ 当且仅当存在 n 阶实方阵 C 使得 $A = ABC$.

八. (本题 7 分) 设 A 为 n 阶方阵, 试证明: 存在对称矩阵 S 和可逆矩阵 P 使得 $A = SP$.

浙江大学 2020-2021 学年 春夏 学期

《线性代数 (甲)》课程期中考试试卷

一. (本题 10 分) 设 $x \neq 2$ 为实常数, 若有 n 阶行列式如下,

$$D_n = \begin{vmatrix} x & 4 & 4 & \dots & 4 & 4 \\ 1 & x & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & x & 2 & 2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & \dots & 2 & x & 2 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & x \end{vmatrix},$$

试证明: $\forall n \in \mathbb{Z}^+, D_n = [x + 2(n-1)](x-2)^{n-1}$.

二. (本题 10 分) 设 A 为三阶方阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 已知 $|A| = \frac{1}{2}$, 试求 $|(3A)^{-1} - 2A^*|$ 的值.

三. (本题 15 分) 设 $a \neq 1$ 是一个实常数, 又已知齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$ 与方程 $x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$ 有公共解, 试求 a 的值以及所有公共解.

四. (本题 20 分) 当实数 a 取何值时线性方程组 $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = a^2 \end{cases}$ 无解, 有解? 有解时求出所有解.

五. (本题 10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{pmatrix}$, 其中 k 为实常数, 试求 A 的秩 $r(A)$.

六. (本题 15 分) 设 a, b 是两个实常数, $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $f(x) = (x-b)^8$, 试求矩阵 $f(A)$, 试给出 $f(A)$ 可逆的条件, 并且当 $f(A)$ 可逆时求其逆 $[f(A)]^{-1}$.

七. (本题 15 分)

(1) 设 A 是一个 n 阶可逆矩阵, 若已知 A 的每一行元素之和都是常数 c , 试证明: $c \neq 0$;

(2) 设 A, B 是 n 阶方阵, 试证明:

$$r(AB + A + B) \leq r(A) + r(B);$$

(3) 设 A, B 为 n 阶方阵, 试证明: 若 $E + AB$ 可逆, 则 $E + BA$ 也可逆.

八. (本题 5 分) 试证明任何一个方阵可以表示为一个可逆矩阵和一个幂等矩阵的乘积. (若方阵 A 满足 $A^2 = A$ 则称 A 是一个幂等矩阵)

浙江大学 2021-2022 学年 秋冬 学期

《线性代数（甲）》课程期中考试试卷

一、（本题 15 分）设有下列 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 7 & -6 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 7 & -6 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 7 \end{vmatrix}$.

(1) 计算 D_1, D_2 ;

(2) 假设当 $n \leq k$ 时有 $D_n = \frac{6^{n+1} - 1}{5}$, 证明: $D_{k+1} = \frac{6^{k+2} - 1}{5}$.

二、（本题 10 分）设 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 A 满足方程 $BA = B^T B$, 求 $|A^* - 2E|$.

三、（本题 10 分）设 n 阶实方阵 A 满足 $A^2 = A$, 证明: $r(A) + r(A - E) = n$.

四、（本题 20 分）设有四元线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$
.

(1) 写出该方程组的系数矩阵 A ;

(2) 利用初等行变换将矩阵 A 化为阶梯形矩阵 U ;

(3) 求 $r(A)$;

(4) 写出该方程组的通解.

五、（本题 10 分）设实方阵 A 的伴随矩阵为 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 且 $|A| > 0$, 已知矩阵 B 满足 $AB = E + 3A$, 求矩阵 B .

六、（本题 25 分）设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

求(1) A^2 ;

(2) A^3 ;

(3) A^{100} ;

(4) A^{-1} .

(5) 一个三次实系数多项式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 使得 $f(A)$ 为三阶零方阵.

七、（本题 10 分）设有 n 阶实方阵 $A = (a_{ij})$ 满足当 $i = j$ 时, $a_{ij} = 2021$, 当 $i < j$ 时 $a_{ij} = i^j$, 当 $i > j$ 时, $a_{ij} = (i + j)!$, 证明: $|A| \neq 0$.

八、（本题 10 分）设 A 为 n 阶方阵且 $r(A) = r > 0$. 证明存在秩为 r 的实方阵 B 和 C 使得 $AB = CA$.

浙江大学 2022-2023 学年 秋冬 学期

《线性代数（甲）》课程期中考试试卷

1. 计算行列式 $D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$.

2. 已知 $n+1$ 行列式 $D = \begin{vmatrix} -1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 2 & & & \\ 1 & & 3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & n+1 \end{vmatrix}$, x_1, x_2, \dots, x_n 为任意常数,

求 $4A_1 + 9A_2 + \dots + (n+1)^2 A_n$, 其中 A_1, A_2, \dots, A_n 分别为 x_1, x_2, \dots, x_n 的代数余子式.

3. 求解线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = \lambda^2. \end{cases}$

4. 用初等行变换将矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 13 & -1 & 1 \\ 5 & 10 & 21 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ 化简成行阶梯形矩阵 B , 使 B 的阶梯头为 1.

5. 设 r 为自然数.

(1) 叙述秩的定义;

(2) 证明: $r(A) \leq r$ 当且仅当 A 中 $r+1$ 阶子式 (若有) 均为 0;

(3) 设 A 通过一次行倍加得到 B , 求证: $r(B) = r(A)$.

6. 设有 $n (\geq 2)$ 阶方阵 A , A^* 为 A 的伴随矩阵, 证明:

(1) $r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1, & r(A) = n-1, \\ 0, & r(A) < n-1; \end{cases}$

(2) $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$;

(3) 若 $r(A) > 0$, 则 $(A^*)^* = A$ 当且仅当 $|A|^{n-2} = 1$.

7. 设 A, C, D 均为 $m \times n$ 阶矩阵, B, D 均为 $n \times s$ 阶矩阵, 证明: $r(AB - CD) \leq r(A - C) + r(B - D)$.

8. 设 A 为 2022^{2022} 阶方阵, 用数学归纳法证明:

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, \forall n \in \mathbb{Z}^+, (n+1)r(A^2) \leq r(A^{n+2}) + nr(A).$$