

2016-2017 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、解答题

1、【解析】依第一行展开后,利用和差化积公式得

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} & \sin \frac{\alpha+\beta}{2} & \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos \frac{\beta-\gamma}{2} & \sin \frac{\beta+\gamma}{2} & \cos \frac{\beta+\gamma}{2} \\ \cos \frac{\gamma-\alpha}{2} & \sin \frac{\gamma+\alpha}{2} & \cos \frac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix} = \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \begin{vmatrix} \sin \frac{\beta+\gamma}{2} & \cos \frac{\beta+\gamma}{2} \\ \sin \frac{\gamma+\alpha}{2} & \cos \frac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix} \\
& - \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \begin{vmatrix} \cos \frac{\beta-\gamma}{2} & \cos \frac{\beta+\gamma}{2} \\ \cos \frac{\gamma-\alpha}{2} & \cos \frac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix} + \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \begin{vmatrix} \cos \frac{\beta-\gamma}{2} & \sin \frac{\beta+\gamma}{2} \\ \cos \frac{\gamma-\alpha}{2} & \sin \frac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix} \\
& = \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \left(\sin \frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2} + \sin \frac{\beta-\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2} - \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \right) \\
& - \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha+\beta}{2} + \cos \frac{\beta-\alpha-2\gamma}{2} - \cos \frac{\beta+\alpha}{2} - \cos \frac{\beta+2\gamma-\alpha}{2} \right) \\
& + \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \left(\sin \frac{2\gamma+\alpha-\beta}{2} + \sin \frac{\beta+\alpha}{2} - \sin \frac{\beta+\alpha}{2} - \sin \frac{\beta+2\gamma-\alpha}{2} \right) \\
& = \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \sin \frac{\beta-\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \left(\cos \frac{\beta-\alpha-2\gamma}{2} - \cos \frac{\beta-\alpha+2\gamma}{2} \right) \\
& + \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \left(\sin \frac{2\gamma+\alpha-\beta}{2} - \sin \frac{2\gamma+\beta-\alpha}{2} \right) \\
& = \frac{1}{2} \sin(\beta-\alpha) + \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{2\gamma+\alpha-\beta}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{2\gamma+\alpha-\beta}{2} \\
& + \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\beta-\alpha+2\gamma}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{2\gamma+\beta-\alpha}{2} \\
& = \frac{1}{2} \sin(\beta-\alpha) + \frac{1}{2} \sin \left(\frac{2\gamma+\alpha-\beta}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\beta-\alpha+2\gamma}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \{ \sin(\beta - \alpha) + \sin(\gamma - \beta) + \sin(\alpha - \gamma) \}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 2——行列式的展开

2、【解析】首先依题设等式有 $(A^{-1} + E)X = -2A^{-1}$

$$\text{又 } |A|^{3-1} = |A^*| = 1 \Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1,$$

如果 $|A| = -1$, 可推得 $A^{-1} + E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 为不可逆矩阵, 矛盾!

$$\text{所以 } |A| = 1, \text{ 因此 } A^{-1} + E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad -2A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{得 } X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5——矩阵的逆

$$3、【解析】\text{计算系数行列式: } D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

(1) 依克拉默法则, 当 a, b, c 互不同时, 方程组有唯一解, 解为

$$x = \frac{(b-a)(c-d)}{(b-a)(c-a)}, \quad y = \frac{(d-a)(d-c)}{(b-a)(b-c)}, \quad z = \frac{(d-a)(d-c)}{(c-a)(c-b)},$$

(2) 当 a, b, c, d 中仅有两个不同时, 并且 $a \neq b$ 或者 $a \neq c$ 或者 $b \neq c$, 则解依赖一个参

数, 例如在 $d = a \neq b = c$ 的情形下通解为 $x = 1, y = \frac{a-c}{b-d}k, z = k$, 其中 k 为任意数,

如果 $a = b = c = d$, 则解为 $x = 1 - k_1 - k_2, y = k_1, z = k_2$, 其中 k_1, k_2 为任意数,

如果在 a, b, c 中两个是不相同的且 d 不等于它们中任何一个, 或者 $a = b = c \neq d$ 时则方程组无解.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17——非齐次线性方程组

$$4、【解析】(1) |\lambda E_{2n} - C| = \begin{vmatrix} \lambda E_n & -A \\ -A & \lambda E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda E_n - A & -A \\ \lambda E_n - A & \lambda E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda E_n - A & -A \\ 0 & \lambda E_n + A \end{vmatrix}$$

$$= |\lambda E_n - A| \cdot |\lambda E_n + A|$$

所以 C 的特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, -\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n$.

$$(2) \text{ 因为 } A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda E - A| = \left| \lambda E - \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right| = \lambda^{n-2} \left| \lambda E_2 - \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \lambda^{n-2} \begin{vmatrix} \lambda - \sum_{k=1}^n a_k^2 & -\sum_{k=1}^n a_k \\ -\sum_{k=1}^n a_k & \lambda - n \end{vmatrix} = \lambda^{n-2} (\lambda - n) \left(\lambda - \sum_{k=1}^n a_k^2 \right)$$

所以 A 的特征值是 $0(n-2\text{重}), n, \sum_{k=1}^n a_k^2$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19——特征值与特征向量

5、【解析】(1) 由假设及实二次型理论, 存在正交矩阵 Q_1 , 使得

$$Q_1^T A_1^T A_1 Q_1 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, 0, \dots, 0), \text{ 其中 } \lambda_k > 0, k=1, 2, \dots, p.$$

设 $X = Q_1 Y$. 故得到

$$\begin{aligned} f &= Y^T Q_1^T (A_1^T A_1 - A_2^T A_2) Q_1 Y = Y Q_1^T A_1^T A_1 Q_1 Y \\ &= Y Q_1^T A_1^T A_1 Q_1 Y - Y^T Q_1^T A_2^T A_2 Q_1 Y \end{aligned}$$

$$= Y^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_p & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} Y - Y^T Q_1^T A_2^T A_2 Q_1 Y,$$

令 $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$, 得到 $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_p y_p^2 - Y^T Q_1^T A_2^T A_2 Q_1 Y$,

存在正交矩阵 Q_2 , 使得

$$Q_2^T Q_1^T A_2^T Q_1 Q_2 = \text{diag}(0, \dots, 0, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n), \text{ 其中 } \lambda_k > 0, k = p+1, \dots, n.$$

令 $Y = Q_2 Z, Q_2 = (q_{ij})_{n \times n}, Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$,

$$f(Z) = \lambda_1 (q_{11} z_1 + \dots + q_{1n} z_n)^2 + \dots + \lambda_p (q_{p1} z_1 + \dots + q_{pn} z_n)^2 - \lambda_{p+1} z_{p+1}^2 - \dots - \lambda_n z_n^2$$

$$\text{因为 } \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{p1} & \dots & q_{pp} \end{pmatrix} \neq 0, \text{ 令 } \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1p} & q_{1,p+1} & \dots & q_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{p1} & \dots & q_{pp} & q_{p,p+1} & \dots & q_{pn} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},$$

$$f(W) = \lambda_1 w_1^2 + \dots + \lambda_p w_p^2 - \lambda_{p+1} w_{p+1}^2 - \dots - \lambda_n w_n^2$$

所以二次型 f 的正惯性指数是 p , 负惯性指数是 $n-p$.

(2) 因为正惯性指数 p + 负惯性指数 $n-p = n = r(A_1^T A_1 - A_2^T A_2)$

所以矩阵 $A_1^T A_1 - A_2^T A_2$ 可逆

【考点延伸】《考试宝典》知识点 22——二次型

6、【解析】(1) 设一个多项式组为 $a, bx+c, dx^2+ex+f, gx^3+hx^2+ix+j$

$$\text{故有 } \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} a(bx+c) dx = \int_0^1 \frac{2ac}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0, \text{ 令 } a=1, \text{ 故 } c=0$$

$$\int_{-1}^1 \frac{(dx^2+ex+f)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \int_0^1 \frac{dx^2+f}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} d + \pi f = 0, \text{ 故 } d = -2f$$

$$\int_{-1}^1 \frac{gx^3 + hx^2 + ix + j}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{hx^2 + j}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left(\frac{\pi}{2} h - \pi j \right) = 0, \text{ 故 } h = -2j$$

$$\int_{-1}^1 \frac{(bx)(dx^2 + ex + f)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{(b)(dx^3 + ex^2 + fx)}{\sqrt{1-x^2}} dx = b \int_{-1}^1 \frac{ex^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0,$$

故 $e = 0$

$$\int_{-1}^1 \frac{bx(gx^3 + hx^2 + ix + j)}{\sqrt{1-x^2}} dx = b \int_{-1}^1 \frac{(gx^4 + hx^3 + ix^2 + jx)}{\sqrt{1-x^2}} dx = b \int_{-1}^1 \frac{gx^4 + ix^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= 2b \left(\frac{3\pi}{16} g + \frac{\pi}{4} i \right) = 0, \text{ 故 } g = -\frac{4}{3} i$$

$$\int_{-1}^1 \frac{(dx^2 + f)(gx^3 + hx^2 + ix + j)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{dhx^4 + jdx^2 + fhx^2 + jf}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \pi \left(2dh \frac{3}{16} + 2(jd + fh) \frac{1}{4} + jf \right) = \pi \left(\frac{3}{8} dh + \frac{1}{2} \left(-\frac{h}{2} d - \frac{d}{2} h \right) - \frac{h}{2} \left(-\frac{d}{2} \right) \right) = 0,$$

得 $h = 0$, 故令 $a = b = d = 1$, $c = 0$, $e = 0$ 则 $f = -\frac{1}{2}$,

令 $g = 1$, $d = 1$, 则 $f = -\frac{1}{2}$, $i = -\frac{3}{4}$, $j = 0$

故一组正交多项式为 $1, x, x^2 - \frac{1}{2}, x^3 - \frac{3}{4}x$

$$(2) 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 4 \left(x^3 - \frac{3}{4}x \right) + 3 \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) + 5x + \frac{5}{2}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 15——向量空间

二、证明题

7、【解析】因为 $\|Ax\| = \|x\|$, 所以有 $\|Ax\|^2 = \|x\|^2$, 即有

$$(Ax, Ax) = (x, x) \Rightarrow (Ax)^T (Ax) = x^T x \Rightarrow x^T A^T Ax = x^T x \Rightarrow x^T (A^T A - E)x = 0$$

又因为 $(A^T A - E)^T = A^T A - E$, 所以 $A^T A - E$ 是实对称矩阵,

故 $A^T A - E = 0$, 有 $A^T A = E$, 即 A 是正交矩阵

【考点延伸】《考试宝典》知识点4——矩阵的概念和基本运算

$$8、【解析】(1) \begin{pmatrix} E_r & O \\ X & E_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aE_r & A \\ B & E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aE_r & A \\ aX+B & XA+E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aE_r & A \\ O & Y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_r & W \\ O & E_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aE_r & A \\ B & E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aE_r+WB & A+W \\ B & E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & O \\ B & E_s \end{pmatrix}$$

$$\text{故 } U = aE_r - AB, \quad W = -A, \quad X = -\frac{1}{a}B, \quad Y = E_s - \frac{1}{a}BA$$

$$(2) \begin{vmatrix} U & O \\ B & E_s \end{vmatrix} = |aE_r - AB|, \quad \begin{vmatrix} aE_r & A \\ O & Y \end{vmatrix} = a^r \left| E_s - \frac{1}{a}BA \right| = a^{r-s} |aE_s - BA|$$

$$\text{又显然可得 } \begin{vmatrix} U & O \\ B & E_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aE_r & A \\ O & Y \end{vmatrix}, \text{ 故可得:}$$

$$|aE_r - AB| = a^{r-s} |aE_s - BA|, \text{ 因此可推出}$$

$$a^s |aE_r - AB| = a^r |aE_s - BA|, \text{ 得证}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点7——分块矩阵

2016-2017 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、【解析】将行列式按照第一行展开可得

$$\begin{aligned} D &= 1 \cdot (-1)^{n-1} (n-1)! + 2 \cdot (-1)^1 \cdot (-1)^{n-2} (n-1)! + \cdots n \cdot (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \\ &= (-1)^{n+1} (n-1)! (1+2+\cdots+n) = (-1)^{n+1} (n-1)! \frac{n(n+1)}{2} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{2} \end{aligned}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 2: 行列式的展开

二、【解析】(1) $B = (A|b) = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{bmatrix}$, $|B| = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c) \neq 0$

所以 $\text{rank}(B) = 4 = \text{rank}(A|b)$, 而易知 $\text{rank}(A) \leq \min\{4, 3\} = 3$, $\therefore r(A) \neq r(A|b)$

即 a, b, c, d 互异时, 方程组无解.

(2) 方程等价于 $\begin{cases} x_1 + kx_2 + k^2x_3 = k^3 \\ x_1 - kx_2 + k^2x_3 = -k^3 \end{cases}$, 带入 $(-1, 1, 1)^T$ 得到: $-1 + k + k^2 = k^3$

$\therefore k = \pm 1$ 时, $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$, 故易求得此方程组通解为 $X = (-1, 1, 1)^T + k(1, 0, -1)^T$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17: 非齐次线性方程组

三、【解析】

(1) $\forall A, B \in V, \text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) = 0$ 显然成立 $\therefore A+B \in V$;

$\forall A \in V, k \in R, \text{tr}(kA) = k\text{tr}(A) = 0$ 亦成立. $\therefore kA \in V$;

即 V 对于加法运算和数乘运算封闭, 即 V 是 $R^{2 \times 2}$ 的一个子空间.

(2) $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & -a \end{bmatrix}$, 即 A 中自由未知量的个数为 3, 即 V 的维数为 3

基底可取为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 15: 向量空间

四、【解析】

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1} + \lambda \cdot \lambda^{n-1} = \lambda^n - 1 = 0$$

\therefore 当 n 为偶数时, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, 易求得相应特征向量为 $\xi_1 = (1, 1, \cdots, 1)^T, \xi_2$

$$= (1, -1, 1, -1, \cdots, 1, -1)^T$$

当 n 为奇数时, $\lambda = 1, \xi = (1, 1, \cdots, 1)^T$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19: 特征值与特征向量

五、【解析】

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ 正定, 所以 } 1 > 0, 1 - t^2 > 0, -5t^2 - 4t > 0 \therefore -\frac{4}{5} < t < 0.$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 24: 正定二次型和正定矩阵

六、【解析】

$$(1) [1+x^2, 1+x, 1] = [1, x, x^2] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [1, x, x^2] M_1, \because M_1 \text{ 可逆,}$$

$\therefore [1+x^2, 1+x, 1]$ 是一组基.

$$(2) \beta_1 = p_1(x) = 1+x^2, \beta_2 = p_2(x) - \frac{(p_2(x), \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = (1+x) - \frac{1}{2}(1+x^2) = \frac{1}{2}(1+2x-x^2)$$

$$\begin{aligned} \beta_3 &= p_3(x) - \frac{(p_3(x), \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(p_3(x), \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 = 1 - \frac{1}{2}(1+x^2) - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2}(1+2x-x^2) \\ &= \frac{1}{3}(1-x-x^2) \end{aligned}$$

再单位化得到一组标准正交基: $\left\{ \frac{1+x^2}{\sqrt{2}}, \frac{1+2x-x^2}{\sqrt{6}}, \frac{1-x-x^2}{\sqrt{3}} \right\}$

$$(3) [1+x+x^2, 1-x^2, 1-x] = [1, x, x^2] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = [1, x, x^2] M_2 = [1+x^2, 1+x, 1] M_1^{-1} M_2$$

$$\text{所以过渡矩阵为 } M_1^{-1} M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(4) \text{ 基底 } A \text{ 的度量矩阵为 } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 基底 } B \text{ 的度量矩阵为 } \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, A, B \text{ 等价, 合同, 不相似.}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 15: 向量空间

七、【解析】

$$(1) (A+E)B=AB+B, BA+B=B(A+E), \text{由高等代数易知 } |\lambda E_n - (AB)_{n \times n}| \\ = \lambda^{n-m} |\lambda E_m - (BA)_{m \times m}|$$

所以 $|\lambda E_n - (A+E)B| = |\lambda E_n - B(A+E)|$, 所以 $AB+B$ 和 $BA+B$ 有相同的特征值.

$$(2) AB = (B - A^T)A = BA - A^T A \Rightarrow A^T A = BA - AB \therefore \text{tr}(BA - AB) = \text{tr}(A^T A) \\ \text{tr}(BA - AB) = \text{tr}(BA) - \text{tr}(AB) = 0 = \text{tr}(A^T A), \text{因为易知 } A^T A \text{ 半正定, 所以特征值全非负} \\ \text{tr}(A^T A) = \text{非负数之和} = 0 \Rightarrow A \text{ 的特征值全为 } 0, \text{即 } A = O.$$

【考点延伸】行列式的降阶公式、矩阵的迹、半正定矩阵

八、【解析】

$$\text{易知: 存在 } n \text{ 阶可逆矩阵 } P, Q, \text{ 有 } A = P \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q = \left(P \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} \right) (PQ) = BC,$$

其中 $B^2 = B$, 且 C 可逆, 证毕.

【考点延伸】矩阵的相抵标准型

2017-2018 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、(本题 10 分)

【解析】

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12}+b_2 & \cdots & a_{1n}+b_n \\ a_{21}+b_1 & a_{22}+b_2 & \cdots & a_{2n}+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_1 & a_{n2}+b_2 & \cdots & a_{nn}+b_n \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_2 & \cdots & a_{1n}+b_n \\ a_{21} & a_{22}+b_2 & \cdots & a_{2n}+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+b_2 & \cdots & a_{nn}+b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_{12}+b_2 & \cdots & a_{1n}+b_n \\ b_1 & a_{22}+b_2 & \cdots & a_{2n}+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & a_{n2}+b_2 & \cdots & a_{nn}+b_n \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_2 & \cdots & a_{1n}+b_n \\ a_{21} & a_{22}+b_2 & \cdots & a_{2n}+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+b_2 & \cdots & a_{nn}+b_n \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} 1 & a_{12}+b_2 & \cdots & a_{1n}+b_n \\ 1 & a_{22}+b_2 & \cdots & a_{2n}+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n2}+b_2 & \cdots & a_{nn}+b_n \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_2 & \cdots & a_{1n}+b_n \\ a_{21} & a_{22}+b_2 & \cdots & a_{2n}+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+b_2 & \cdots & a_{nn}+b_n \end{vmatrix} + b_1 \sum_{i=1}^n A_{i1} \\
 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}+b_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_2 & \cdots & a_{1n}+b_n \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n}+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_2 & \cdots & a_{nn}+b_n \end{vmatrix} + b_1 \sum_{i=1}^n A_{i1} \\
 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}+b_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_n \end{vmatrix} + b_2 \sum_{i=1}^n A_{i2} + b_1 \sum_{i=1}^n A_{i1} \\
 &= D + \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=1}^n A_{ij}
 \end{aligned}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 1——行列式的概念及其性质

二、(本题 15 分)

【解析】 $(\beta - \alpha_1 \quad \beta - \alpha_2 \quad \beta - \alpha_3) = (\alpha_2 + \alpha_3 \quad \alpha_1 + \alpha_3 \quad \alpha_1 + \alpha_2) = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{故 } |\beta - \alpha_1 \quad \beta - \alpha_2 \quad \beta - \alpha_3| = |\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3| \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

得证 $\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \beta - \alpha_3$ 线性无关当且仅当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关

【考点延伸】《考试宝典》知识点 11——向量组的线性相关和线性表示

三、(本题 15 分)

【解析】(1) 如果 $A = 0$, 则 A 满足条件

(2) 如果 $0 < R(A) < n-1 \quad \because A^* = 0$, 此时 $A \neq A^*$

(3) 如果 $R(A) = n-1 \implies R(A^*) = 1$

a) 当 $n > 2$ 时, $A \neq A^*$

b) 当 $n = 2$ 时, 即 $R(A) = 1$, 设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 则 $A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

如果 $A = A^* \implies a = d, b = c = 0$, $\therefore A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, 此时 $R(A) = 0$, 或者 $R(A) = 2$

矛盾, 故 $A \neq A^*$

(4) 如果 $R(A) = n \implies R(A^*) = n \quad \therefore A^* = |A|A^{-1} = A \iff A^2 = |A|E$

综上, 满足 $A = A^*$ 的矩阵为零矩阵, 或者 $A^2 = |A|E$ 的可逆矩阵

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9——矩阵的秩和矩阵等价

四、(本题 15 分)

$$\text{【解析】} (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -9 & 0 \\ -1 & 3 & -16 & -1 \\ 2 & -4 & 22 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -11 & 55 & 7 \\ 0 & -8 & 40 & 1 \\ 1 & 2 & -9 & 0 \\ 0 & 5 & -25 & -1 \\ 0 & -8 & 40 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -11 & 55 & 7 \\ 0 & -8 & 40 & 1 \\ 1 & 2 & -9 & 0 \\ 0 & 5 & -25 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -11 & 55 & 0 \\ 0 & -8 & 40 & 0 \\ 1 & 2 & -9 & 0 \\ 0 & 5 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$, 秩为 3

【考点延伸】《考试宝典》知识点 12——极大线性无关组

五、(本题 15 分)

【解析】(1) 显然 V 非空 $\because 0 \in V$ 又 $\because A^{3k} = E, A^{3k+1} = A, A^{3k+2} = A^2$

$$\therefore V = L(A^2, A, E)$$

$$\therefore \forall c \in C, f_1(A), f_2(A) \in V \quad f_1(A) + f_2(A) \in V, cf_1(A) \in V$$

 $\therefore V$ 关于矩阵的加法和数乘构成复数域 C 上的一个线性空间

$$(2) \text{ 设有: } k_1 A^2 + k_2 A + k_3 E = 0$$

$$\Rightarrow k_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ \omega^2 k_1 + \omega k_2 + k_3 = 0 \\ \omega k_1 + \omega^2 k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \quad \because \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega^2 & \omega & 1 \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{vmatrix} = 3(\omega - \omega^2) \neq 0$$

$$\therefore k_1 = k_2 = k_3 = 0 \quad \therefore A^2, A, E \text{ 线性无关, 为 } V \text{ 的一组基, } \dim V = 3$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 15——向量空间

六、(本题 15 分)

【解析】(1) $|\lambda E - A| = \lambda^2(\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, AX = 0$ 基础解系: $(1, 0, 0, 0)^T, (0, 1, 0, 0)^T$

$\lambda_1 = 1, (E - A)X = 0$ 基础解系: $(-7, 5, 3, 5)^T$

$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}E - A\right)X = 0$ 基础解系: $(-8, 6, 1, 2)^T$

(2) P 存在. P 为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

(3) U 不存在, $\therefore A$ 不是对称矩阵

【考点延伸】《考试宝典》知识点 16——齐次线性方程组

七、(本题 8 分)

【解析】 \Rightarrow : 由已知, $X^T A X \geq 0 \quad \therefore X^T (cE + A) X = cX^T X + X^T A X > 0$

\Leftarrow : 设 λ 为 A 的特征值, 则 $c + \lambda$ 为 $cE + A$ 的特征值

$\therefore \forall c > 0, cE + A$ 为正定 $\Rightarrow \forall c > 0, c + \lambda > 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 24——正定二次型和正定矩阵

八、(本题 7 分)

【解析】 $|A - B| = |A| |E - A^{-1}B|$

$\therefore (A^{-1}B)^T = -A^{-1}B$, 需证明, 1 不是反对称矩阵的实特征值

设 $C^T = -C, CX = \lambda X \Rightarrow X^T CX = \lambda X^T X$

$X^T CX = X^T (-C^T) X = - (CX)^T X = - (\lambda X)^T X = - \lambda X^T X$

故反实对称矩阵特征值为0 $\therefore |E - A^{-1}B| \neq 0 \therefore |A - B| \neq 0$

故 $A - B$ 可逆

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5——矩阵的逆

2017-2018 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、【解析】

$$\text{考虑如下行列式: } D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & x \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & x^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 & x^3 \\ 1 & 2^4 & 3^4 & 4^4 & 5^4 & x^4 \\ 1 & 2^5 & 3^5 & 4^5 & 5^5 & x^5 \end{vmatrix} = 4! 3! 2! (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$

考虑 $D(x)$ 的 x^4 的系数 $= (-1)^{5+6} D = 4! 3! 2! (-1-2-3-4-5)$

$$\therefore D = 4! 3! 2! (1+2+3+4+5)$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 3: 行列式的展开

二、【解析】

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关: 存在不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_n , 使得 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 \dots + k_n \alpha_n = 0$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关: 若 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 \dots + k_n \alpha_n = 0$ 成立, 则 k_1, k_2, \dots, k_n 全为 0.

(2) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$ 线性相关, 即存在不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_r, l , 使得 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 \dots + k_r \alpha_r + l \beta = 0$

若 $l = 0$, 则有 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 \dots + k_r \alpha_r = 0$, 又因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 所以 k_1, k_2, \dots, k_r 全为 0, 显然矛盾.

所以可知 $l \neq 0$, 即 $\beta = -\frac{1}{l} (k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 \dots + k_r \alpha_r)$, 即 β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示.

下证唯一性: 设 $\beta = m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 \dots + m_r \alpha_r, \beta = n_1 \alpha_1 + n_2 \alpha_2 \dots + n_r \alpha_r$, 两式作差可得:

$$0 = (m_1 - n_1) \alpha_1 + (m_2 - n_2) \alpha_2 \dots + (m_r - n_r) \alpha_r, \text{ 又因为 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \text{ 线性无关}$$

所以 $m_1 - n_1 = m_2 - n_2 = \dots = m_r - n_r = 0$, 即 $m_1 = n_1, m_2 = n_2, \dots, m_r = n_r$.

即唯一性得证.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 12: 极大线性无关组

三、【解析】

① 若 $k_1 X_1 + \dots + k_t X_t$ 是 $AX = b$ 的解, 则 $A(k_1 X_1 + \dots + k_t X_t) = b$

$$A(k_1 X_1 + \dots + k_t X_t) = k_1 b + k_2 b + \dots + k_t b = b \therefore k_1 + k_2 + \dots + k_t = 1$$

② 若 $k_1 + k_2 + \dots + k_t = 1$, 则 $A(k_1 X_1 + \dots + k_t X_t) = k_1 b + k_2 b + \dots + k_t b = b$ 成立.

即 $k_1 X_1 + \dots + k_t X_t$ 是 $AX = b$ 的解.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 18: 方程组解的理论延伸

四、【解析】

(1) $\forall (k_1, k_2, \dots, k_n)^T, (m_1, m_2, \dots, m_n)^T \in W$, 有 $k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n = m_1\alpha_1 + \dots + m_n\alpha_n = 0$

则 $0 = (k_1 + m_1)\alpha_1 + \dots + (k_n + m_n)\alpha_n = 0$, 所以 $(k_1 + m_1, k_2 + m_2, \dots, k_n + m_n)^T \in W$

$\forall l \in R, \forall (k_1, k_2, \dots, k_n)^T \in W$, 有 $k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n = 0$,

则对于 $l(k_1, k_2, \dots, k_n)^T = (lk_1, lk_2, \dots, lk_n)^T$, 有 $lk_1\alpha_1 + \dots + lk_n\alpha_n = 0$, $\therefore l(k_1, k_2, \dots, k_n)^T \in W$

即 W 对加法运算和数乘运算封闭, 所以 W 为 R^n 的一个子空间.

(2) 不妨设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 为一个极大无关组, 设 $\alpha_{r+i} = -l_{i1}\alpha_1 - \dots - l_{ir}\alpha_r (i=1, \dots, n-r)$

于是设 $X_1 = (l_{11}, \dots, l_{r1}, 1, 0, \dots, 0)^T, X_2 = (l_{12}, \dots, l_{r2}, 0, 1, \dots, 0)^T, \dots, X_{n-r} = (l_{1, n-r}, \dots, l_{r, n-r}, 0, 0, \dots, 1)^T$

显然 X_1, X_2, \dots, X_{n-r} 线性无关, 所以易知 $\dim W = n-r, X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$ 即为 W 的一组基底.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 15: 向量空间

五、【解析】

$$(1) (6-5x+x^2, 3-4x+x^2, 2-3x+x^2) = (1, x, x^2) \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -5 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{所以从基}(I)\text{到基}(II)\text{的过渡矩阵为} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -5 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(2) \text{从基}(II)\text{到基}(I)\text{的过渡矩阵为} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -5 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -2 & -4 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix}.$$

$$(3) p(x) = 1 + x + x^2 \text{ 在基}(I)\text{下的坐标为} X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{则在基}(II)\text{下的坐标为} X' = P^{-1}X$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -2 & -4 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -7 \\ \frac{13}{2} \end{bmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 10-15 【重要题型】题型 4: 向量坐标与坐标变换

六、【解析】

$\because \|\alpha\| = 1$, 把 α 扩充为 V 的标准正交基: $\alpha, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$

令 $\beta = k_1\alpha + k_2\varepsilon_2 + \dots + k_n\varepsilon_n \Rightarrow (\alpha, \beta) = k_1$, 若 $k_1 = 1$, 则 $(\beta, \beta) = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2 = 1$

$\Rightarrow k_2 = \dots = k_n = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$, 即矛盾.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 15: 向量空间

七、【解析】

$(AB^T + BA)^T = BA + AB^T \therefore BA + AB^T$ 是实对称矩阵.

又因为 $BA + AB^T$ 所有特征值为正实数, 所以 $BA + AB^T$ 为正定矩阵

设 $AX = \lambda X \therefore X^T B^T X = (X^T B^T X)^T = X^T BX$

$\therefore 0 < X^T (AB^T + BA) X = \lambda X^T B^T X + X^T B \lambda X = 2\lambda (X^T BX)$

$\therefore \lambda \neq 0 \therefore A$ 可逆.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 24: 正定二次型和正定矩阵

2018-2019 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、(本题 15 分)

【解析】(1) $\forall n \geq 3$, 按照第 n 列展开, 得

$$D_n = a_n D_{n-1} + (-1)^{n-1+n} \begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = a_n D_{n-1} + D_{n-2}$$

(2) 当 $a_1 = \cdots = a_n = 0$ 时, 有 $D_n = D_{n-2}$ 因为 $D_1 = 0, D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ -1 & a_2 \end{vmatrix} = 1$ 知 $D_{2n} = 1, D_{2n-1} = 0$ (3) 当 $a_1 = \cdots = a_n = 1$ 时, 有 $\forall n \geq 3, D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$ 所以设 $D_n - xD_{n-1} = q(D_{n-1} - xD_{n-2})$, 其中 $\begin{cases} q+x=1 \\ -xq=1 \end{cases} \Rightarrow x, q$ 是方程 $t^2 - t - 1 = 0$ 的解解得 $t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, 这时候 $\{D_n - xD_{n-1}\}$ 是以首项为 $(D_2 - xD_1)$, 公比为 q 的等比数列, 进而有 $D_n - xD_{n-1} = (D_2 - xD_1)q^{n-2}$, 由对称性可得 $D_n - qD_{n-1} = (D_2 - qD_1)x^{n-2}$ 联立这两个式子, 消去 D_{n-1} , 可解得 $D_n = \frac{(D_2 - xD_1)q^{n-1} - (D_2 - qD_1)x^{n-1}}{q - x}$ 代入 $q = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, D_1 = 1$ 从而 $D_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 2: 行列式的展开

二、(本题 15 分)

【解析】第一步: 先证明 $\dim V = 3$ 因为任意一个二阶实对称矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 这说明任意一个二阶实对称矩阵都可以由 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 线性表出

再证明: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是线性无关的

假设线性相关, 则存在不全为 0 的实数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases}$$

这和假设矛盾, 所以 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是线性无关的

于是 $\dim V = 3$

第二步: 证明 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 是线性无关的

一旦第二步得证, 结合 $\dim V = 3$, 那么立即得 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 是 V 的一组基

设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 线性相关, 则存在不全为 0 的实数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_3 = 0 \\ -k_1 + k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

这和假设矛盾, 所以第二步得证; 于是 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 是 V 的一组基

【考点延伸】《考试宝典》知识点 15: 向量空间

三、(本题 15 分)

【解析】该线性方程组对应的矩阵为:

$$[A, b] = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 14 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & \lambda & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 2 & \lambda-3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

当 $\lambda = 1$ 时, $R(A) = 2, R(A, b) = 3$, 此时方程组无解

当 $\lambda \neq 1$ 时, 等价的同解方程组为
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 4x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ (\lambda - 1)x_4 = 5 \end{cases}$$

因为 $R(A)=3$, 故有一个自由变量, 不妨设 $x_2=c$, 那么解得:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{9}{2}c - \frac{10}{\lambda-1} \\ x_2 = c \\ x_3 = 4c + \frac{5}{\lambda-1} \\ x_4 = \frac{5}{\lambda-1} \end{cases}$$

所以通解为
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{\lambda-1} \begin{pmatrix} \frac{\lambda-11}{5} \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } c \text{ 为任意常数}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17: 非齐次线性方程组

四、(本题 10 分)

【解析】先考虑 A 不可逆时的情形, 有 $(A^*)^*A^* = AA^* = |A|E = O$

有 $R(A) + R(A^*) \leq n$, 倘若 $R(A) \leq n-2$

由伴随矩阵的定义知此时必然 $A^* = O \implies A = (A^*)^* = O$

如果 $R(A) = n-1$, 则有 $R(A^*) \leq 1 \implies R(A^*) = 1$ (这是因为 A^* 非零), 于是由伴随矩阵的定义有 $(A^*)^* = O \implies A = O$, 这和 $R(A) = n-1$ 矛盾, 所以当 A 不可逆时, 满足条件的方阵 $A = O$

下面再考虑 A 可逆时的情形

令集合 $B = \{A \in M_n(C) \mid |A|^n = 1\}$, 这里 $M_n(C)$ 表示复数域 C 上的所有 $n \times n$ 阶矩阵构成的集合,

这里先给出本题的结论: 当且仅当 $A \in B$ 时, 满足 $(A^*)^* = A$

下面给出结论的证明: 先证明 $(A^*)^* = A \implies A \in B$

由于 $|A^*| = |A|^{n-1}$, 所以 $|(A^*)^*| = |A^*|^{n-1} = |A|^{(n-1)^2} = |A| \implies |A|^{n^2-2n} = 1 \implies |A|^{n(n-2)} = 1 \implies |A|^n = 1 \implies A \in B$

再证明: $A \in B \implies (A^*)^* = A$

$(A^*)^*A^* = |A^*|E = |A|^{n-1}E = \frac{E}{|A|}$, 又因为 $A^*A = |A|E \implies A^* = |A|A^{-1}$

从而 $(A^*)^* \cdot |A|A^{-1} = \frac{E}{|A|}$, 由于 $A \in B \implies |A|^n = 1 \implies |A|^2 = 1$, 进而得到 $(A^*)^* = \frac{A}{|A|^2} = A$

到此, 结论的充要性得证, 综上所述: $A=O$ 或 $A \in \{A \in M_n(C) \mid |A|^n = 1\}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4-9 【重要题型】题型 4: 伴随矩阵的计算

五、(本题 15 分)

【解析】(1) 任取 $(a_1x + a_2(1+x^2)), (b_1x + b_2(1+x^2)) \in W$, 其中 $a_i, b_i \in R (i=1, 2)$

则有: $(a_1x + a_2(1+x^2)) + (b_1x + b_2(1+x^2)) = (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)(1+x^2) \in W$

$k(a_1x + a_2(1+x^2)) = (ka_1)x + (ka_2)(1+x^2) \in W \quad \forall k \in R, k \neq 0$

所以 W 是 $R[x]_3$ 的一个子空间

(2) 利用施密特正交化:

$$\text{令 } \alpha_1 = x, \quad \alpha_2 = (1+x^2) - \frac{(x, 1+x^2)}{(x, x)}x = 1+x^2 - \frac{\int_0^1 (x+x^3)dx}{\int_0^1 x^2dx}x = 1+x^2 - \frac{9}{4}x$$

$$\text{再单位化: } \eta_1 = \frac{\alpha_1}{\sqrt{(\alpha_1, \alpha_1)}} = \frac{x}{\sqrt{\int_0^1 x^2dx}} = \sqrt{3}x$$

$$\eta_2 = \frac{\alpha_2}{\sqrt{(\alpha_2, \alpha_2)}} = \frac{1+x^2 - \frac{9}{4}x}{\sqrt{\int_0^1 (x^2 - \frac{9}{4}x + 1)^2dx}} = 4\sqrt{\frac{15}{43}} \left(1+x^2 - \frac{9}{4}x\right)$$

$$(3) (\eta_1, \eta_2) = \left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{(\alpha_1, \alpha_1)}}, \frac{(1+x^2) - \frac{9}{4}x}{\sqrt{(\alpha_2, \alpha_2)}} \right) = (x, 1+x^2) \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -9\sqrt{\frac{15}{43}} \\ 0 & 4\sqrt{\frac{15}{43}} \end{bmatrix}$$

$$\text{于是过渡矩阵为 } \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -9\sqrt{\frac{15}{43}} \\ 0 & 4\sqrt{\frac{15}{43}} \end{bmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 15: 向量空间

六、(本题 15 分)

$$\text{【解析】(1) 二次型 } f \text{ 对应的矩阵 } A \text{ 为 } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \text{ 设 } 3 \text{ 对应的特征向量为 } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}, \text{ 那么 } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ x = 3y \\ tz + w = 3z \\ z + 2w = 3w \end{cases} \Rightarrow t = 2$$

$$(3) \text{ 设 } B \text{ 对应的二次型为 } g(x_1, x_2, x_3, x_4) = X^T A^T A X = (AX)^T A X \geq 0$$

所以 B 一定为半正定矩阵时才符合题意, 且 B 只可能为半正定矩阵或正定矩阵

先考虑 B 为正定矩阵的情形, 这时候齐次线性方程组 $AX = 0$ 只有零解

$$\text{即 } |A| \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow t \neq \frac{1}{2}$$

所以当且仅当 $t = \frac{1}{2}$ 时, B 为半正定矩阵 (即符合题意的非正定的情形)

【考点延伸】《考试宝典》知识点 22: 二次型

七、(本题 8 分)

【解析】因为 A 为 n 阶实对称矩阵, 所以 A 必然可以相似对角化

于是存在正交矩阵 P , 使得 $A = P^{-1} \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) P$, 其中 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为 A 的特征值

因为 $|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i < 0$, 所以至少存在一个 $\lambda_i < 0$

在正交变换 $X = P^T Y$ 下, 将二次型化为标准形为:

$$X^T A X = X^T P^T A P X = (P X)^T A (P X) = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2$$

于是当 $Y = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)^T$, 其中第 i 个分量为 1, 那么 $X^T A X = \lambda_i < 0$

此时 $X = P^T (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)^T$, 命题得证

【考点延伸】《考试宝典》知识点 22: 二次型

八、(本题 7 分) 设 A, B 是两个 $m \times n$ 阶矩阵且存在两个方阵 C, D 使得 $A = BC, B = AD$, 试证明:

存在可逆矩阵 M 使得 $B = AM$

【解析】设 $C = (c_{ij})_{n \times n}, D = (d_{ij})_{n \times n}, A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n], B = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$

$$\text{由 } A = BC \Rightarrow [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] (c_{ij})_{n \times n} \Rightarrow \alpha_j = \sum_{k=1}^n c_{kj} \beta_k \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

$$B = AD \Rightarrow [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] (d_{ij})_{n \times n} \Rightarrow \beta_j = \sum_{k=1}^n d_{kj} \alpha_k \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

当 C 和 D 有一者为零矩阵时, 立即可推得 $A = O, B = O$, 这时任取一个可逆矩阵 M 都可以有 $B = AM$

当 C 和 D 两者都不为零矩阵时, 由上面两个式子表明: 向量组 $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n], [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$ 可相互线性表示, 所以这两个向量组等价, 于是矩阵 A 必可以通过列初等变换得到 B

于是存在可逆矩阵 M 使得 $B = AM$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9: 矩阵的秩和矩阵等价

2019-2020 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、(本题 10 分)

【解析】 $n \geq 3$ 时, $a_{ij} = \sin(i+j) = \sin i \cos j + \cos i \sin j$

$$|A| = \begin{vmatrix} \sin 1 \cos 1 + \cos 1 \sin 1 & \sin 1 \cos 2 + \cos 1 \sin 2 & \cdots & \sin 1 \cos n + \cos 1 \sin n \\ \sin 2 \cos 1 + \cos 2 \sin 1 & \sin 2 \cos 2 + \cos 2 \sin 2 & \cdots & \sin 2 \cos n + \cos 2 \sin n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1 & \sin n \cos 2 + \cos n \sin 2 & \cdots & \sin n \cos n + \cos n \sin n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} \sin 1 & \cos 1 \\ \sin 2 & \cos 2 \\ \vdots & \vdots \\ \sin n & \cos n \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cos 1 & \cos 2 & \cdots & \cos n \\ \sin 1 & \sin 2 & \cdots & \sin n \end{bmatrix} \end{vmatrix}$$

$$\text{因为 } R \left(\begin{bmatrix} \sin 1 & \cos 1 \\ \sin 2 & \cos 2 \\ \vdots & \vdots \\ \sin n & \cos n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 1 & \cos 2 & \cdots & \cos n \\ \sin 1 & \sin 2 & \cdots & \sin n \end{bmatrix} \right) \leq 2 < n, \text{ 所以 } |A| = 0$$

$$\text{当 } n=2 \text{ 时, } |A| = \begin{vmatrix} \sin 2 & \sin 3 \\ \sin 3 & \sin 4 \end{vmatrix} = \sin 2 \sin 4 - \sin^2 3$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } |A| = \sin 2$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4-9 【重要题型】题型 1: 矩阵的运算与矩阵行列式的计算

二、(本题 15 分)

$$\text{【解析】(1) 令 } A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \text{ 下面作初等行变换}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由初等变换后的结果可见, $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = R(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5) = 3$ 又因为 $L = \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\} \Rightarrow \dim L = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = 3$ 所以 $\dim L = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = R(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5) = 3$, 于是 (I)、(II) 为 L 的两组基(2) 因为 $\alpha_2 = \alpha_2, \alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4$

$$\text{所以 } [\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5] = [\alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{从而基(I)到基(II)的过渡矩阵为 } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 15: 向量空间

三、(本题 15 分)

【解析】 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解 $\iff AX=0$ 与 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X=0$ 同解 $\iff R(A)=R(B)=R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

$$\text{即 } A、B \text{ 的行向量组等价, 因为 } \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & b & c \\ 2 & b^2 & c+1 \end{bmatrix}$$

$$\text{首先有 } R(B) \leq \min\{3, 2\} = 2 \implies R(A) \leq 2 < 3 \implies |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a + 2 = 0 \implies a = 2$$

所以只要保证 $R(B) = R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = R(A) = 2$ 即可

下面对 $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ 作初等列变换

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & b & c \\ 2 & b^2 & c+1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & b-2 & c-3 \\ 2 & b^2-4 & c-5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2-b & c-b-1 \\ 2 & 4-b^2 & c-b^2-1 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} c-b-1=0 \\ c-b^2-1=0 \end{cases}$$

所以解得 $\begin{cases} b=0 \\ c=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b=1 \\ c=2 \end{cases}$, 但上式仅保证了 $R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 2$, 还需保证 $R(B) = 2$

$$\text{此时必然要有 } \begin{vmatrix} 1 & b-2 \\ 2 & b^2-4 \end{vmatrix} = b^2 - 2b = b(b-2) \neq 0 \implies b \neq 0, 2$$

综上所述, $a=2, b=1, c=2$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 16: 齐次线性方程组

四、(本题 20 分)

$$\text{【解析】}(1) |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ a & 1-\lambda & b \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2(\lambda+1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$$

(2) A 可相似于一对角矩阵的充要条件为: 每一个特征值对应的几何重数与代数重数相等

对于特征值 1, 代数重数为 2, 几何重数为 $3 - R(A - E) \Rightarrow R(A - E) = 1$

$$A - E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ a & 0 & b \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 结合秩 } 1, \text{ 所以 } a + b = 0$$

对于特征值 -1, 代数重数为 1, 几何重数为 $3 - R(A + E) \Rightarrow R(A + E) = 2$

$$A + E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & b \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 满足 } R(A + E) = 2$$

所以当 $a + b = 0$ 时, A 可相似于一对角矩阵

(3) 若 A 可相似对角化, 则 A 必然可与 $\text{diag}(1, 1, -1)$ 相似

下面验证 B 是否可以相似于 $\text{diag}(1, 1, -1)$

$$|B - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(-1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$$

对于特征值 1, 代数重数为 2

$$B - E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow R(B - E) = 1, \text{ 所以几何重数为 } 3 - R(B - E) = 2$$

满足几何重数等于代数重数

而对于特征值 -1, 代数重数为 1, 几何重数也一定为 1

综上所述, B 可相似对角化于 $\text{diag}(1, 1, -1)$, 进而 A 相似于 B

(4) 对于特征值 1

$$A - E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ a & 0 & b \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 解得两个线性无关的特征向量 } p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

对于特征值-1,

$$A + E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & b \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{解得特征向量 } p_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{所以可逆矩阵 } P = [p_1, p_2, p_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 20: 矩阵相似对角化

五、(本题 15 分)

【解析】(1) 任取一个正实数 a , 有 $a = e^{\ln a} = \ln a \odot e$, 这表明 a 可以由 e 线性表示

设 $k \odot e = 1$, 则 $e^k = 1$, 由此推出 $k = 0$, 因此 e 是线性无关的, 从而 e 是实线性空间 R^+ 的一个基,

于是 $\dim R^+ = 1$

(2) 为构造这样符合题意的可列无穷多个向量组, 先证明一个结论:

设 V_1, V_2, \dots, V_s 是线性空间 V 的 s 个非平凡子空间, 则 V 中至少存在一个向量不属于 V_1, V_2, \dots, V_s 中的任何一个。证明如下:

采用数学归纳法, 当 $s = 2$ 时, 由于 V_1, V_2 都是非平凡线性子空间, 所以 V 中存在 $\alpha \notin V_1$, 如果 $\alpha \notin V_2$, 则结论已经成立, 若 $\alpha \in V_2$, 由 V_2 非平凡知存在 $\beta \notin V_2$, 考虑 $\alpha + \beta$ 与 $2\alpha + \beta$, 显然这两个向量都不属于 V_2 (否则必然可以推出 $\beta \in V_2$), 并且这两个向量也不能同时都属于 V_1 (否则两个向量相减得到 α 属于 V_1 , 产生矛盾), 这就说明 $\alpha + \beta$ 与 $\alpha + 2\beta$ 中至少有一个向量既不属于 V_1 也不属于 V_2 , 此时命题得证;

现在假设命题对 $s - 1$ 个空间也成立, 那么对于 s 个空间 V_1, V_2, \dots, V_s , 利用假设知存在向量

$\alpha \notin \bigcup_{i=1}^{s-1} V_i$, 如果 $\alpha \notin V_s$, 则结论已经成立; 如果 $\alpha \in V_s$, 由 V_s 非平凡知存在 $\beta \notin V_s$, 现在考虑向量

$\alpha + \beta, 2\alpha + \beta, \dots, s\alpha + \beta$, 其中每一个都不属于 V_s (如果存在 $k\alpha + \beta \in V_s$, 立即可推得 $\beta \in V_s$,

矛盾导出), 同时, 这 s 个向量中, 不可能存在两个向量同属于一个 $V_i (i = 1, 2, \dots, s - 1)$, 原因是

若 $k\alpha + \beta, l\alpha + \beta (k \neq l)$ 都属于 V_i , 则这两个向量做差后可推得 $\alpha \in V_i$, 这与假设矛盾。综上, 在向量

$\alpha + \beta, 2\alpha + \beta, \dots, s\alpha + \beta$ 中, 至少有一个向量 $j\alpha + \beta \notin \bigcup_{i=1}^s V_i$, 到此, 结论证毕

接下来构造符合题意的可列无穷多个向量, 采用如下的方式:

在 n 维线性空间 V 中选取一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 其中的任意 $n-1$ 个向量可生成 n 个 $n-1$ 维的线性空间 V_1, V_2, \dots, V_n , 根据刚刚证明的结论知: 存在 $\alpha_{n+1} \notin \bigcup_{i=1}^n V_i$, 所以 α_{n+1} 和 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 中任意 $n-1$ 个向量组成的新的向量组是线性无关的 (否则必然可有 $\alpha_{n+1} \in \bigcup_{i=1}^n V_i$, 矛盾); 将 α_{n+1} 添加进向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 其中任意的 $n-1$ 个向量可生成 C_{n+1}^2 个 $n-1$ 维的线性空间 $V_1, V_2, \dots, V_{C_{n+1}^2}$, 根据刚刚证明的结论知: 存在 $\alpha_{n+2} \notin \bigcup_{i=1}^{C_{n+1}^2} V_i$, 所以 α_{n+2} 和 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ 中任意 $n-1$ 个向量组成的新的向量组是线性无关的. 重复此过程, 可得符合题意的可列向量组 $\{\alpha_i | i \in \mathbb{Z}^+\}$, 命题得证

【考点延伸】《考试宝典》知识点 15: 向量空间

六、(本题 10 分)

【解析】(1) 因为 A 是一个实对称矩阵, 所以一定满足所有特征值对应的几何重数与代数重数相等
由 $r(A+E)=r < n \implies |A+E|=0 \implies -1$ 是特征值, 且代数重数为 $n-r$

又因为 $A^2=E$, 所以 A 的特征值只能为 1 或 -1, 因此 1 是特征值, 且代数重数为 r

于是 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_r^2 - y_{r+1}^2 - \dots - y_n^2$

(2) B 的特征值为 5 与 1, 且 B 也是实对称矩阵, 因为特征值都大于 0, 所以 B 正定
又因为特征值 5 的重数为 r , 1 的重数为 $n-r$, 故 $|B|=5^r \cdot 1^{n-r}=5^r$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 22: 二次型

七、(本题 8 分)

【解析】非齐次线性方程组 $AX=\alpha$ 有无穷多解的充要条件为: $R(A)=R(A, \alpha) < n$

下面证明: α 是齐次线性方程组 $A^*X=0_n$ 的解 $\iff R(A)=R(A, \alpha) < n$

先证明: α 是齐次线性方程组 $A^*X=0_n$ 的解 $\implies R(A)=R(A, \alpha) < n$

因为 $A_{11} \neq 0 \implies R(A) \geq n-1$, 又因为 $A^*\alpha=0$, 且 α 非零, 所以 $R(A^*) \leq n-1$

于是知 A 不可逆, 从而 $R(A)=n-1$, 此时有 $AA^*=|A|E=0 \implies R(A)+R(A^*) \leq n$

$\implies R(A^*) \leq 1 \implies R(A^*)=1$, 由于 $A^*A=|A|E=0_n$, 所以 A 的列向量组 $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ 中的每

一个向量都是 $A^*X=0$ 的解, 设 $A^*X=0$ 的解空间为 W , 则 $\dim W = n - R(A^*) = n - 1$, 另一方面, 有 $R(A) = R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = n - 1$, 所以 $W = \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$

又注意到 $\alpha \in W$, 从而存在不全为 0 的实数 $k_i (i=1, 2, \dots, n)$, 使得 $\alpha = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i$, 于是必然有

$$R(A, \alpha) = R(A) = n - 1 < n$$

再证明: $R(A) = R(A, \alpha) < n \implies \alpha$ 是齐次线性方程组 $A^*X=0_n$ 的解

因为 $A_{11} \neq 0 \implies R(A) \geq n - 1$, 结合 $R(A) < n \implies R(A) = n - 1 \implies R(A^*) = 1$

又因为 $R(A) = R(A, \alpha) = n - 1$, 所以 α 一定可由 A 的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出, 如不然, 必然有 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha$ 线性无关, 那么 $R(A, \alpha) = n \neq n - 1$ 产生矛盾。

所以存在不全为 0 的实数 $k_i (i=1, 2, \dots, n)$, 使得 $\alpha = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i$

又因为 $A^*A = |A|E = 0_n$, 所以 $A^*\alpha_i = 0 (i=1, 2, \dots, n)$

进而有: $A^*\alpha = \sum_{i=1}^n A^*\alpha_i = 0 \implies \alpha$ 是 $A^*X=0_n$ 的解

到此, 命题得证

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17: 非齐次线性方程组

八、(本题 7 分)

【解析】假设 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关, 因为 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的地位等价性, 我们不妨假设存在不全为 0 的实数

$$k_1, k_2, \text{ 使得 } \beta_3 = k_1\beta_1 + k_2\beta_2, \text{ 于是有: } \begin{cases} (\beta_3, \beta_1) = k_1(\beta_1, \beta_1) + k_2(\beta_2, \beta_1) \dots\dots ① \\ (\beta_3, \beta_2) = k_1(\beta_1, \beta_2) + k_2(\beta_2, \beta_2) \dots\dots ② \\ (\beta_3, \beta_3) = k_1(\beta_1, \beta_3) + k_2(\beta_2, \beta_3) \dots\dots ③ \\ (\beta_3, \beta) = k_1(\beta_1, \beta) + k_2(\beta_2, \beta) \dots\dots ④ \end{cases}$$

由④式知 k_1, k_2 不能同时小于等于 0, 进而由③式知 k_1, k_2 必有一个大于 0, 一个小于等于 0

不妨假设 $k_1 > 0, k_2 \leq 0$, 那么由①式: 左端小于等于 0, 右端大于 0 导出矛盾;

如果假设 $k_1 \leq 0, k_2 > 0$, 那么由②式: 左端小于等于 0, 右端大于 0 导出矛盾;

所以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关

【考点延伸】《考试宝典》知识点 10-15 【重要题型】题型 2: 用定义和重要结论证明线性相关性

2019-2020 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、【解析】记 $D_n = |A| = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1+x^2 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$, 求行列式时, 按第一行展开得

到

$$D_n = (1+x^2)D_{n-1} - x^2 D_{n-2}$$

即有 $D_n - x^2 D_{n-1} = D_{n-1} - x^2 D_{n-2} = \cdots = D_2 - x^2 D_1 = 1$, 即 $D_n - x^2 D_{n-1} = 1$, 另一方面, 有

$D_n - D_{n-1} = x^2 (D_{n-1} - D_{n-2}) = \cdots = x^{2(n-2)} (D_2 - D_1) = x^{2n}$, 即 $D_n - D_{n-1} = x^{2n}$, 联立得到

$$\begin{cases} D_n - x^2 D_{n-1} = 1 \\ D_n - D_{n-1} = x^{2n} \end{cases} \Rightarrow D_n = \frac{x^{2n+2} - 1}{x^2 - 1} = \sum_{k=0}^n x^{2k}.$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 2: 行列式的展开

二、【解析】(1)选取标准正交基

$$(III): \varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0)^T, \varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0)^T, \varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0)^T, \varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1)^T$$

$$\text{有 } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{那}$$

$$\text{么有 } (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{那么过渡矩阵 } M \text{ 为}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \text{有 } \eta = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{则}$$

$$\eta = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

则向量 $\eta = (1, 0, 0, 0)^T$, 在基 (I) 下的坐标为 $X = \left(\frac{3}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{2}{13}, -\frac{3}{13}\right)^T$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 15: 向量空间 题型 4: 向量坐标与坐标变换

三、【解析】设 $\alpha = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, 那么有

$$\alpha = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 = x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + x_3 \varepsilon_3 + x_4 \varepsilon_4$$

得到 $(\varepsilon_1 - e_1)x_1 + (\varepsilon_2 - e_2)x_2 + (\varepsilon_3 - e_3)x_3 + (\varepsilon_4 - e_4)x_4 = 0$, 得到方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{系数矩阵 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 即有 } \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}, \text{ 取 } x_4 = -1, \text{ 得 } x_1 = x_2 = x_3 = 1,$$

因此 $\alpha = (1, 1, 1, -1)^T$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 16: 齐次线性方程组

四、【解析】秩最多为 $n-1$. 设 A 为 n 阶方阵, 则 A 至多有 $n-1$ 个非零元素, 将这 $n-1$ 个非零元素分别位于不同行、不同列, 形成一个阶梯矩阵, 那么它的秩为 $n-1$, 否则它的秩小于 $n-1$, 因此该方阵的最大秩为 $n-1$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9: 矩阵的秩和矩阵等价

五、【解析】(1) 设 $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 若 α 在基 (I) 和基 (II) 下有相同的坐标, 那么得到

$$\alpha = x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + \dots + x_n \varepsilon_n = x_1 \eta_1 + x_2 \eta_2 + \dots + x_n \eta_n$$

整理得到 $(\varepsilon_1 - \eta_1)x_1 + (\varepsilon_2 - \eta_2)x_2 + \dots + (\varepsilon_n - \eta_n)x_n = 0$, 记 $A = (\varepsilon_1 - \eta_1, \varepsilon_2 - \eta_2, \dots, \varepsilon_n - \eta_n)$,

则有 $W = \{\alpha \in V | A\alpha = 0\}$, 显然 $0 \in W$, 则 W 非空, 对 $\forall \alpha, \beta \in W$, $\lambda, \mu \in K$, 有 $A\alpha = 0, A\beta = 0$

那么有 $A(\lambda\alpha + \mu\beta) = \lambda A\alpha + \mu A\beta = 0$

故 $\lambda\alpha + \mu\beta \in W$, 因此 W 是 V 的子空间.

(2)由(1)可知 $W = \{\alpha \in V | A\alpha = 0\}$, 则有 $r(A) = r$, 即 W 为方程组 $A\alpha = 0$ 的解空间, 故 W 的维数即为 $A\alpha = 0$ 解空间的维数, 即 $\dim W = n - r(A) = n - r$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 15: 向量空间

六、【解析】实二次型 f 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, 其特征多项式为 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda - 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda - 1 \end{vmatrix} =$

$\frac{1}{4}(\lambda - 2)(2\lambda - 1)^2 = 0$, 求解得到 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$, 那么存在可逆矩阵, 成立 $P^T A P = \Lambda$, 其

中 $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, 令 $x = Py$, 则 $x^T A x = y^T P^T A P y = y^T \Lambda y = 2y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2$, 那么该二次型

的规范形为 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$, 由于正惯性指数为 3, 因此该二次型正定.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 22: 二次型

七、【解析】特征多项式 $|\lambda E_n - A| = \begin{vmatrix} (\lambda - 1)E_r & -B \\ O & (\lambda + 1)E_{n-r} \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^r (\lambda + 1)^{n-r} = 0$, 得到特征值

为 $\lambda_1 = 1$ (r 重), $\lambda_2 = -1$ ($n - r$ 重), 求解方程组 $(E_n - A)x = 0$, 有 $E_n - A = \begin{pmatrix} O & -B \\ O & 2E_{n-r} \end{pmatrix}$, 显然有

$r(E_n - A) = n - r$, 因此 $(E_n - A)x = 0$ 的解空间的维数为 $n - r(E_n - A) = r$, 说明特征值 $\lambda_1 = 1$ 对

应有 r 个线性无关的特征向量; 同理求解方程组 $(E_n + A)x = 0$, 有 $E_n + A = \begin{pmatrix} E_r & B \\ O & O \end{pmatrix}$, 容易得到

$r(E_n + A) = r$, 因此 $(E_n + A)x = 0$ 的解空间的维数为 $n - r(E_n + A) = n - r$, 说明特征值

$\lambda_2 = -1$ 对应有 $n - r$ 个线性无关的特征向. 不同特征值对应的特征向量线性无关, 综上所述, 矩阵

A 有 n 个线性无关的特征向量, 因此 A 可相似对角化.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 21: 实对称矩阵的对角化

八、【解析】(1)(\Rightarrow) 由于 A 是反对称矩阵, 那么 $A^T = -A$, 因此 $AA^T = A \cdot (-A) = -A^2$;

(\Leftarrow) 有 $AA^T = -A^2 \Rightarrow A(A^T + A) = O$, 设 A 的第 i 行第 j 列的元素为 a_{ij} , 那么 $A + A^T$ 的第 i 行第 j 列的元素为 $a_{ij} + a_{ji}$, 那么 $A(A^T + A)$ 的对角线元素第 i 行第 i 列为 $b_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(a_{ji} + a_{ij}) = 0$, 那么有 $0 = \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=j} 2a_{ii}^2 + \sum_{i \neq j} (a_{ij} + a_{ji})^2$, 因此 $a_{ii} = 0$, $a_{ij} = -a_{ji}$, 故 $A = -A^T$, 即 A 是反对称矩阵.

(2) 由(1)可知, B 是反对称矩阵, 对任意非零向量 x 有 $x^T Bx = -x^T Bx$, 则 $x^T Bx = 0$, 由于 C 是 n 阶正定矩阵, 那么对上述非零向量 x 有 $x^T Cx > 0$, 因此 $x^T (C + B)x > 0$, 说明 $C + B$ 是一个正定矩阵, 则其所有特征值均大于 0, 则 $|C + B| \neq 0$, 则 $C + B$ 可逆.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 24: 正定二次型和正定矩阵

2020-2021 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、【解析】 $A = \begin{pmatrix} x & a & \cdots & a \\ b & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & x \end{pmatrix}$, 记 $|A(t)| = \begin{vmatrix} x+t & a+t & \cdots & a+t \\ b+t & x+t & \cdots & a+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b+t & b+t & \cdots & x+t \end{vmatrix}$, 那么有 $|A(t)| = |A| + t \cdot r$,

其中 $r = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}$, A_{ij} 表示 $|A|$ 中第 i 行第 j 列元素的代数余子式, 那么得到

$$\begin{cases} |A(-a)| = |A| - ar = (x-a)^n \\ |A(-b)| = |A| - br = (x-b)^n \end{cases}$$

求解得到 $|A| = \frac{a(x-b)^n - b(x-a)^n}{a-b}$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 2: 行列式的展开

二、【解析】(1) 令 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)^T$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0)^T$, $\varepsilon_3 = (0, 0, 1)^T$, 这是 \mathbb{R}^3 的一组标准正

交基, 有 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 有 $|A| = -5 \neq 0$, 因此

A 可逆, 因此 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 也是 \mathbb{R}^3 的一组基.

(2) 令 $\beta_1 = \alpha_1 = (1, -1, 0)^T$, 则 $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix};$

$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$, 单位化得到

(II): $\gamma_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)^T, \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right)^T, \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^T$

(3) 由(1)和(2)知

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ①$$

$$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \quad ②$$

那么 $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}^{-1} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, 带入①中得到

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

因此基(II)到基(I)的过渡矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{5\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 14: 标准正交向量组 题型 4: 向量坐标与坐标变换

三、【解析】增广矩阵 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \mu & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 & \mu \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \mu-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu-\lambda-2 & \mu-\lambda \end{pmatrix}$

①当 $\mu-\lambda=2$ 时, 得到 $\bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \mu-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 有 $R(A) \neq R(\bar{A})$, 方程组无解;

②当 $\begin{cases} \mu-\lambda \neq 2 \\ \mu=\lambda \neq 1 \end{cases}$ 时, 得到 $\bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mu-1 & 0 & \mu-1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu-1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, 得到解为 $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=0 \\ x_3=0 \\ x_4=0 \end{cases}$;

③当 $\begin{cases} \mu-\lambda \neq 2 \\ \mu=\lambda=1 \end{cases}$ 时, 得到 $\bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, 得到 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_3=0 \\ x_4=0 \end{cases}$, 得到通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } k \text{ 为常数.}$$

④当 $\begin{cases} \mu-\lambda \neq 2 \\ \mu \neq \lambda \\ \lambda=1 \end{cases}$ 时, 得到 $\bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu-3 & \mu-1 \end{pmatrix}$, 方程组无解;

$$\textcircled{5} \text{ 当 } \begin{cases} \mu - \lambda \neq 2 \\ \mu \neq \lambda \\ \lambda \neq 1 \end{cases} \text{ 时, } \bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & \mu - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - \lambda - 2 & \mu - \lambda \end{pmatrix}, \text{ 得到 } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ (\lambda - 1)x_2 + (\mu - 1)x_4 = 0 \\ (\lambda - 1)x_3 - 2x_4 = 0 \\ (\mu - \lambda - 2)x_4 = \mu - \lambda \end{cases},$$

$$\text{得到解为 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{(\mu + \lambda)(\mu - \lambda)}{(\lambda - 1)(\mu - \lambda - 2)} \\ \frac{(\mu - 1)(\mu - \lambda)}{(\lambda - 1)(\mu - \lambda - 2)} \\ \frac{2(\mu - \lambda)}{(\lambda - 1)(\mu - \lambda - 2)} \\ \frac{\mu - \lambda}{\mu - \lambda - 2} \end{pmatrix}.$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17: 非齐次线性方程组

四、【解析】(1)相似矩阵有相同的迹, 则 $1 + 4 + a = 2 + 2 + b \Rightarrow b = a + 1$, 相似矩阵有相同的行列式, 那么有 $6a - 6 = 4b$, 联立求解得到 $a = 5$, $b = 6$.

$$(2) \text{ 显然 } A \text{ 的特征值为 } 2, 2, 6, \text{ 解方程组 } (2E - A)x = 0, 2E - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{得到特征向量为 } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \text{ 解方程组 } (6E - A)x = 0, 6E - A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{得到特征向量 } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ 令 } P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ 则成立 } P^{-1}AP = B.$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 20: 矩阵相似对角化

五、【解析】(1)对 $\forall X_1, X_2 \in W$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 有 $AX_1 \in \mathbb{R}^m$, $BX_1 = 0_p$, $AX_2 \in \mathbb{R}^m$, $BX_2 = 0_p$,

那么有 $A(\lambda X_1 + \mu X_2) = \lambda AX_1 + \mu AX_2 \in \mathbb{R}^m$, $B(\lambda X_1 + \mu X_2) = \lambda BX_1 + \mu BX_2 = 0_p$, 得到

$\lambda X_1 + \mu X_2 \in W$, 因此 W 是 \mathbb{R}^m 的子空间.

(2)考虑映射 $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\varphi(X) = AX$, 将 W_1 即可看作是线性方程组 $BX = 0_p$ 的解空间, 再 φ 限制

在 W_1 上, 那么 $W = \varphi(W_1)$, 利用维数公式得到 $n - r(B) = \dim W_1 = \dim \varphi(W_1) + \dim \text{Ker } \varphi|_{W_1}$, 又有

$\dim \text{Ker } \varphi|_{W_1} = \dim \text{Ker } \varphi \cap W_1$ 是线性方程组 $AX=0$, $BX=0$ 的公共解, 即 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X=0$ 的解空间, 因此

得到 $\dim \text{Ker } \varphi|_{W_1} = \dim \text{Ker } \varphi \cap W_1 = n - r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, 带入维数公式得到

$$\dim W = \dim W_1 = r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - r(B) = r_1 - r_2.$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 15: 向量空间

六、

【解析】令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$, 得到 $f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 - 8y_2y_3 = 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 + 2y_3)^2 + 6y_3^2$

再令 $\begin{cases} z_1 = \frac{y_1 - y_3}{\sqrt{2}} \\ z_2 = \frac{y_2 + 2y_3}{\sqrt{2}} \\ z_3 = \frac{y_3}{\sqrt{6}} \end{cases}$, 得到规范型 $f = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$, 那么该二次型的秩为 3, 正惯性指数为 2.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 22: 二次型

七、【解析】(1) Frobenius 不等式: $r(ABC) \geq r(AB) + r(BC) - r(B)$

(2)①变形得到 $r(A^3) \geq 2r(A^2) - r(A)$, 利用 Frobenius 不等式, 取 $B = C = A$ 得到

$$r(A^3) \geq r(A^2) + r(A^2) - r(A) = 2r(A^2) - r(A).$$

②令 $C = A$, $B = A^n$, 利用 Frobenius 不等式得到

$$r(A^{n+2}) \geq r(A^{n+1}) + r(A^{n+1}) - r(A^n) = 2r(A^{n+1}) - r(A^n)$$

令 $C = A$, $B = A^{n-1}$, 继续利用 Frobenius 不等式得到

$$r(A^{n+1}) \geq 2r(A^n) - r(A^{n-1})$$

带入上式得到 $r(A^{n+2}) \geq 2[2r(A^n) - r(A^{n-1})] - r(A^n) = 3r(A^n) - 2r(A^{n-1})$, 循环下去得到

$$r(A^{n+2}) \geq (n+1)r(A^2) - nr(A)$$

令 $n = 2020$ 得到, $r(A^{2022}) \geq 2021r(A^2) - 2020r(A)$, 即为②式.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9: 矩阵的秩和矩阵等价

八、【解析】(1) 因为 A 既是正定矩阵又是实对称矩阵, 因此存在可逆矩阵 Q , 使得 $A = QQ^T$, 则 AB 相似于 $Q^{-1}ABQ = Q^{-1}QQ^TBQ = Q^TBQ$, 而 Q^TBQ 是 n 阶实对称矩阵, 一定可以相似对角化, 因此 AB 可以相似于对角矩阵, 因此 AB 可以相似对角化.

(2) ① $D(E+X) = E-X \Rightarrow (D+E)X = E-D$, 由于 $D+E$ 可逆, 则 $r(D+E)$ 满秩, 因此增广矩阵 $\bar{A} = (D+E) : (E-D)$ 的秩 $r(\bar{A}) = r(D+E)$, 则该矩阵方程必定有解;

② 原命题即证明 $X = -X^T \Leftrightarrow (D+E)(X+X^T) = O$ 只有零解, 由于 $D+E$ 可逆, 这是显然的, 若 $(D+E)(-X^T) = E-D$ 成立, 即可得到 $(D+E)(X+X^T) = O$, 从而原命题转为证明 $-X^T$ 也是矩阵方程 $D(E+X) = E-X$ 的解. 由 $(D+E)X = E-D$, 得 $X = (D+E)^{-1}(E-D)$, $-(D+E)X^T = -(D+E)[(D+E)^{-1}(E-D)]^T = -(D+E)(E-D^T)(D^T+E)^{-1}$, 由于 D 是正交矩阵, 那么 $D^TD = DD^T = E$, 因此 $-(D+E)X^T = (D^T-D)(D^T+E)^{-1}$
 $= DD^T(D^T-D)(D^T+E)^{-1} = D((D^T)^2 - E)(D^T+E)^{-1} = D(D^T - E) = E-D$, 因此 $-X^T$ 也是该矩阵方程的解, 即 X 是一个实反对称矩阵.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 21: 实对称矩阵的对角化

2021-2022 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

$$1. \text{【解析】} D_n = \begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+\sum_{i=1}^n a_i & a_2 & \cdots & a_n \\ x+\sum_{i=1}^n a_i & a_2+x & \cdots & a_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x+\sum_{i=1}^n a_i & a_2 & \cdots & a_n+x \end{vmatrix}$$

$$= \left(x + \sum_{i=1}^n a_i\right) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & \cdots & a_n+x \end{vmatrix} = \left(x + \sum_{i=1}^n a_i\right) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} \\ = \left(x + \sum_{i=1}^n a_i\right) x^{n-1} = x^n + x^{n-1} \sum_{i=1}^n a_i$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 1: 行列式的概念及其性质

$$2. \text{【解析】} (1) \text{ 先证 } \dim L = 2, \text{ 令 } A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } \dim L = R(A)$$

$= 2$. 此时可以得到 α_1, α_2 线性无关, α_3, α_4 也线性无关, 因此两者均可以作为 L 的一组基, 命题得证.

$$(2) \text{ 设过渡矩阵为 } M, \text{ 则 } (\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_3, \alpha_4)M \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} M, \text{ 利用广义逆矩阵的定义可以得}$$

$$\text{到 } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^+ = \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}, \text{ 则可以得到过渡矩阵}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 12: 极大线性无关组 题型 4: 向量坐标与坐标变换

3. 【解析】增广矩阵 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda & 3 \\ 1 & \lambda & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 0 & (2-\lambda)(\lambda+3) & 2-\lambda \end{pmatrix}$

①当 $\begin{cases} (2-\lambda)(\lambda+3)=0 \\ 2-\lambda \neq 0 \end{cases}$ 时, 即 $\lambda = -3$ 时, 得到 $R(A) \neq R(\bar{A})$, 因此线性方程组此时无解;

②当 $\begin{cases} (2-\lambda)(\lambda+3)=0 \\ 2-\lambda = 0 \end{cases}$ 时, 即 $\lambda = 2$ 时, 得到 $R(A) = R(\bar{A}) = 2$, 故线性方程组有无穷多组解,

此时增广矩阵为 $\bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 得到方程组 $\begin{cases} x_1 - 5x_3 = 0 \\ x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$, 得到通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 k 为常数.

③当 $\begin{cases} (2-\lambda)(\lambda+3) \neq 0 \\ 2-\lambda \neq 0 \end{cases}$ 时, 即 $\lambda \neq -3$ 且 $\lambda \neq 2$, 此时 $R(A) = R(\bar{A}) = 3$, 故线性方程组有唯一解,

此时增广矩阵 $\bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda-3 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 0 & (2-\lambda)(\lambda+3) & 2-\lambda \end{pmatrix}$, 得到方程组 $\begin{cases} x_1 - (\lambda+3)x_3 = 0 \\ x_2 + (\lambda+2)x_3 = 1 \\ (2-\lambda)(\lambda+3)x_3 = 2-\lambda \end{cases}$, 其唯

$$\text{一解为 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda+3} \\ \frac{1}{\lambda+3} \\ \frac{1}{\lambda+3} \end{pmatrix}.$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17: 非齐次线性方程组

4. 【解析】(1) 有 $6A^3 = 11A^2 - 6A + 1 \Rightarrow (A-E)\left(A - \frac{1}{2}E\right)\left(A - \frac{1}{3}E\right) = 0$, 得到 A 的特征值为

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = \frac{1}{3}.$$

(2) 由(1)可知 A 可以对角化, 那么存在可逆矩阵 P , 成立

$$P^{-1}AP = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{从而有 } P^{-1}A^kP = A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^k} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^k} \end{pmatrix} \Rightarrow A^k = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^k} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^k} \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ 由于 } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^k} = 0, \text{ 且}$$

$$\text{可逆矩阵 } P \text{ 中的元素均为有限数, 且 } \lim_{k \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^k} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^k} \end{pmatrix} \text{ 是存在的, 故 } \lim_{k \rightarrow +\infty} M_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} (a_{ij}(k)) \text{ 存在.}$$

$$(3) \text{ 由 (2) 可知 } M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ 则}$$

$$M^2 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = M$$

即得到 M 是幂等矩阵.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19: 特征值与特征向量

5. 【解析】(1) 设 $f(x) = ax + be^x$ 构成的空间为 M , 设 $\forall f(x), g(x) \in M$, 且有

$$f(x) = a_1x + b_1e^x, \quad g(x) = a_2x + b_2e^x$$

则 $f(x) + g(x) = (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)e^x \in M$, 对 $\forall k \in V$, 有

$$kf(x) = k(a_1x + b_1e^x) = ka_1x + kb_1e^x \in M$$

说明 M 是 V 的子空间.

(2) 由 (1) 知, M 空间的任意一个元素均能被 x, e^x 所表示, 因此 x, e^x 可以作为 M 的一组基, 因此

向量 $h_1(x) = x, h_2(x) = e^x$ 线性无关. 设存在常数 k_1, k_2 成立 $k_1f(x) + k_2g(x) = 0$, 整理得到

$$(k_1 + k_2)x + k_2e^x = 0$$

由于向量 $h_1(x)=x$, $h_2(x)=e^x$ 线性无关, 则 $\begin{cases} k_1+k_2=0 \\ k_2=0 \end{cases} \Rightarrow k_1=k_2=0$, 因此向量 $f(x)=x$,

$g(x)=x+e^x$ 线性无关.

(3) 先对其进行正交化, 设 $p_1(x)=f(x)=x$, 定义 $(f(x), g(x))=\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$, 那么得到

$$(p_1(x), p_1(x))=\int_{-1}^1 x^2 dx=\frac{2}{3}, (p_1(x), g(x))=\int_{-1}^1 x(x+e^x)dx=\frac{2}{3}+\frac{2}{e}, \text{ 因此}$$

$$p_2(x)=g(x)-\frac{(p_1(x), g(x))}{(p_1(x), p_1(x))}p_1(x)=(x+e^x)-\frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{e}}{\frac{2}{3}}x=e^x-\frac{3}{e}x$$

$$\text{单位化得到 } \eta_1=\frac{p_1(x)}{\sqrt{(p_1(x), p_1(x))}}=\sqrt{\frac{3}{2}}x, \eta_2=\frac{p_2(x)}{\sqrt{(p_2(x), p_2(x))}}=\frac{\sqrt{2}e\left(e^x-\frac{3}{e}x\right)}{\sqrt{e^4-13}}.$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 15: 向量空间.

$$6. \text{【解析】二次型的矩阵为 } A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 得到特征多项式}$$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \frac{\lambda(2\lambda^2-1)}{2} = 0$$

得到三个特征值分别为 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\lambda_3=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 因此其规范形为 $f=y_1^2-y_2^2$, 其秩等于

其矩阵的秩, 为 2, 正惯性指数为 1, 负惯性指数为 1, 则符号差为 0.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 22: 二次型

$$7. \text{【解析】} (\Rightarrow) \text{ 由于 } r(A)=r, \text{ 从而存在 } m \text{ 阶可逆矩阵 } S \text{ 和 } n \text{ 阶可逆矩阵 } T, \text{ 使得 } SAT = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

那么有

$$A = S^{-1} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} T^{-1} = S^{-1} \begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix} (E_r \ O) T^{-1}$$

令 $M_{m \times r} = S^{-1} \begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}$, $N_{r \times n} = (E_r \ O) T^{-1}$, 对 M 按列分块得到 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, 对 N 按行分块得到

$\beta_1^T, \beta_2^T, \dots, \beta_r^T$, 即 A 可分解为 $A = \sum_{i=1}^r \alpha_i \beta_i^T$.

$$(\Leftarrow) A = \sum_{i=1}^r \alpha_i \beta_i^T \Rightarrow A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_r^T \end{pmatrix} = M_{m \times r} N_{r \times n}, \text{ 那么 } r(A) \leq \min(r(M), r(N)), \text{ 且}$$

$r(A) \geq r(M) + r(N) - r$, 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 是线性无关的, 则 $r(M) = r(N) = r$, 因此可以得到 $r(A) = r$.

【考点延伸】《考试宝典》矩阵的满秩分解

8. 【解析】(1) 由于 B 是 n 阶正定矩阵, 则必定存在实可逆矩阵 Q , 成立 $B = QQ^T$, 则 $AB = AQQ^T$, 对于矩阵 AQQ^T , 有 $Q^T AQQ^T (Q^T)^{-1} = Q^T AQ$, 即 AQQ^T 与 $Q^T AQ$ 相似, 由于 A 是 n 阶实对称阵, 则 $Q^T AQ$ 也是 n 阶实对称阵, 实对称矩阵的特征值一定全为实数, 则 AB 的特征值全为实数.

$$(2) A^{-1} + B^{-1} = (A + B)^{-1} \Rightarrow (A + B)(A^{-1} + B^{-1}) = E \Rightarrow AB^{-1} = -E - BA^{-1}, \text{ 则}$$

$$(AB^{-1})^2 = (-E - BA^{-1})(AB^{-1}) = -AB^{-1} - E = E + BA^{-1} - E = BA^{-1}$$

$$\text{则 } (AB^{-1})^3 = E.$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5: 矩阵的逆

发现错误怎么办

反馈有奖



扫码或联系QQ: 1152296818

本资料编者都是学长学姐, 虽然仔细核对了多遍, 但可能会有一些疏漏, 诚恳希望学弟学妹们积极反馈错误, 我们会及时更正在二维码里哦(づ3づ)