



常微分方程笔记

Quinn

2026 年 1 月 5 日

- *Notes for Ordinary Differential Equations*
- 模版来源: <https://github.com/fenglielie/latexzero>

写在前面

此笔记为张挺老师《常微分方程》课程的学习笔记，课程代码 MATH2102M。
笔记顺序为授课顺序，与教材顺序略有不同。

约定

在整个笔记中，若无特殊说明，均采用以下约定：

- I 表示一段连续的区间.
- $C(I)$ 表示在区间 I 上所有连续函数所组成的集合.
- $C^n(I)$ 表示在区间 I 上所有直到 n 阶导数均连续的函数所组成的集合.
- ODE 表示常微分方程 (Ordinary Differential Equation).
- LODE 表示线性常微分方程 (Linear Ordinary Differential Equation).
- ODEs 表示常微分方程组 (Ordinary Differential Equations System).
- $\int p(x) dx$ 表示 $p(x)$ 的其中一个原函数.

目录

1	基本概念	3
2	一阶 ODE	5
2.1	线性 ODE	5
2.1.1	齐次 ODE	5
2.1.2	非齐次 ODE	6
2.1.3	性质	7
2.2	非线性 ODE	8
2.2.1	变量分离方程	8
2.2.2	齐次方程	10
2.2.3	伯努利方程	11
2.2.4	Ricatti 方程	12
2.2.5	全微分方程	12
2.3	一般形式	16
2.4	奇解	18
2.5	可降阶二阶 ODE	19
3	线性常微分方程组 (LODEs)	20
3.1	解的存在性与唯一性	20
3.2	解的形式	22
3.3	求解方法	25
3.3.1	分析角度	25
3.3.2	一重根	28
3.3.3	多重根	30
4	线性常微分方程 (LODE)	33
4.1	解的存在性	33
4.2	求解方式	34
4.2.1	齐次方程	34
4.2.2	非齐次方程	39
4.2.3	常数变易法	41
4.3	变系数 LODE	43
4.3.1	Eular 方程	43
4.3.2	降阶法	45
4.3.3	特殊系数	46
4.3.4	常数变易法	47
4.3.5	(广义) 幂级数法	48
4.4	二阶 LODE 的零点分布	49
4.5	二阶 LODE 的边值问题	51

5	一阶常微分方程的适定性	54
5.1	存在性	54
5.2	唯一性	58
5.2.1	Lip 条件	58
5.2.2	Osgood 条件	61
5.2.3	单调递减条件	62
5.2.4	Cauchy 存在定理	62
5.3	解的延拓	64
5.3.1	存在性	64
5.3.2	唯一性	66
5.3.3	整体解	66
5.3.4	解存在区间估计	69
5.4	连续依赖性	72
5.5	求解高阶 ODEs	76
5.5.1	首次积分法	76
5.5.2	Hamilton 系统	76
5.5.3	极坐标法	77
6	稳定性理论	78
6.1	LODEs 的稳定性	79
6.2	线性近似法	80
6.3	Lyapunov 第二方法	82
7	几何理论	84
7.1	线性方程	84
7.2	非线性方程	85
8	一阶偏微分方程 (PDE)	86
8.1	一阶 LPDE	86
8.2	一般的一阶 LPDE	87
8.3	首次积分法	88

1 基本概念

微分方程 (differential equation) 主要分为以下两类:

自变量	未知函数
一个	常微分方程
多个	偏微分方程

Definition 1.1. 微分方程中实际出现的最高阶导数, 称为该微分方程的**阶数**。

方程中实际出现的最高阶导数, 称为**阶数**。

实际情况下, 微分方程是系统中的瞬时状态的表示, 然后进行求解 (一般是多个解), 再通过求得解修正微分方程。

微分方程通过加「定解条件」, 得到「定解问题」。我们常说的**初值 (柯西) 问题**就是给定初值条件。

Example 1.1 (单摆). 我们认为 θ 充分小, 有 $\theta \sim \sin \theta$.

对重力进行分解:

$$F = -mg \sin \theta$$

位移:

$$x = l\theta$$

因此我们有:

$$-mg \sin \theta = ma = ml\theta''$$

$$\theta'' + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

$$\theta'' + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (\text{近似解})$$

微分方程的一般形式为:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

标准形式为:

$$y_{(x)}^{(n)} = F(x, y_{(x)}, y_{(x)}'', \dots, y_{(x)}^{(n-1)})$$

Definition 1.2. 若 $y = \varphi(x)$ 在连续区间 I 上连续, 直至 n 阶导连续, 且成立

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

则称 $y = \varphi(x)$ 是 $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ 在区间 I 的一个**解**。

- **特解:** 不含任意常数 C
- **通解:** $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ (一族函数) 包含 n 个独立的任意常数。

Definition 1.3. 当 C_1, C_2, \dots, C_n 满足 **Jacobi 行列式**

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial C_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi}{\partial C_n} \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial C_1} & \frac{\partial \varphi'}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi'}{\partial C_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^n \varphi}{\partial C_1^n} & \frac{\partial^n \varphi}{\partial C_2^n} & \cdots & \frac{\partial^n \varphi}{\partial C_n^n} \end{vmatrix} \neq 0$$

则称 C_1, C_2, \dots, C_n 是**独立的**.

Example 1.2. 求 $xy = \ln y + C, C \in \mathbb{R}$ 满足的一阶 ODE.

Solution. 求导 $(\frac{d}{dx})$:

$$y + xy' = \frac{y'}{y}$$

□

Example 1.3. 求 $x^2 + y^2 = 2Cx$ 满足的一阶 ODE.

Solution. 求导 $(\frac{d}{dx})$:

$$\begin{aligned} 2x + 2yy' &= 2C \\ x^2 + y^2 &= (2x + 2yy')x \\ -\frac{x}{y} + \frac{y}{x} &= 2y' \end{aligned}$$

□

2 一阶 ODE

本章是对一阶线性常微分方程 $y' = f(x, y)$ 求解的探究, 我们希望能够用初等函数及其积分来表示解.

2.1 线性 ODE

Definition 2.1. 若 $p(x), q(x) \in C(I)$, 则称

$$y' = p(x)y + q(x)$$

为区间 I 上的线性 ODE. 特别的, 若 $q(x) \equiv 0$, 则称

$$y' = p(x)y$$

为区间 I 上的线性齐次 ODE.

2.1.1 齐次 ODE

Problem 2.1. 求解齐次线性 ODE:

$$y' = p(x)y$$

其中 $p(x) \in C(I)$.

Solution (解法 1). 猜测:

$$y = C e^{\int p(x) dx}$$

验证:

- $y = 0$ 显然是解.
- $y \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= p(x) \\ &= (\ln |y|)' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \ln |y| &= \int p(x) dx + C_1 \\ \implies y &= \pm e^{C_1} e^{\int p(x) dx} \end{aligned}$$

$\therefore y = C e^{\int p(x) dx}, C \in \mathbb{R}$ 是通解公式.

(解法 2)

$$\begin{aligned}y' - p(x)y &= 0 \\ \implies y' e^{-\int p(x) dx} - p(x)y e^{-\int p(x) dx} &= 0 \\ \implies \left(e^{-\int p(x) dx} y \right)' &= 0 \\ \implies e^{-\int p(x) dx} y &= C \\ \implies y &= C e^{\int p(x) dx}\end{aligned}$$

□

2.1.2 非齐次 ODE

Problem 2.2. 求解非齐次线性 ODE:

$$y' = p(x)y + q(x)$$

其中 $p(x), q(x) \in C(I)$.

Solution.

$$\begin{aligned}\left(y e^{-\int p(x) dx} \right)' &= q(x) e^{-\int p(x) dx} \\ \implies y e^{-\int p(x) dx} &= \int q(x) e^{-\int p(x) dx} dx + C \quad \forall C \in \mathbb{R} \\ \implies y &= e^{\int p(x) dx} \left(\int q(x) e^{-\int p(x) dx} dx + C \right)\end{aligned}$$

□

Lemma 2.1. 线性 ODE

$$y' = p(x)y + q(x)$$

的通解为

$$y = e^{\int p(x) dx} \left(\int q(x) e^{-\int p(x) dx} dx + C \right)$$

其中 $C \in \mathbb{R}$.

若有初值条件 $y(x_0) = y_0$, 则有唯一解

$$y = e^{\int_{x_0}^x p(t) dt} \left(y_0 + \int_{x_0}^x q(t) e^{-\int_{x_0}^t p(s) ds} dt \right)$$

Example 2.1.

$$\begin{cases} y'(t) = 0.005 - \frac{y(t)}{900} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Solution.

$$\begin{aligned}y &= e^{-\frac{t}{900}} \left[18 + 0.005 \times 900 \left(e^{\frac{t}{900}} - 1 \right) \right] \\ &= 4.5 + 13.5 e^{-\frac{t}{900}}\end{aligned}$$

□

2.1.3 性质

线性齐次 ODE

1. 解 $\equiv 0$ 或恒不为零.
2. $p \in C(I) \implies$ 解在 I 上存在.
3. {解} 构成一维线性空间.

线性非齐次 ODE

1.
$$\begin{cases} y' = p(x)y + q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
 存在唯一解.
2. $p, q \in C(I) \implies$ 解在 I 上存在.
3. 非齐次 ODE 通解 = 齐次 ODE 通解 + 特解.
4. (叠加原理)
$$\begin{cases} y'_1 = p(x)y_1 + q_1(x) \\ y'_2 = p(x)y_2 + q_2(x) \end{cases} \implies c_1y_1 + c_2y_2$$
 是 $y' = p(x)y + (c_1q_1(x) + c_2q_2(x))$ 的解.

Example 2.2. 已知 $f(x) \in C'(I)$, 求解积分方程

$$2 \int_0^x (x+1-t)f'(t) dt = x^2 - 1 + f(x)$$

Solution. 令 $x=0 \implies f(0)=1$, 因此是 Cauchy 问题.

两边求导 $\left(\frac{d}{dx}\right)$:

$$\begin{aligned}2 \int_0^x f'(t) dt + 2f'(x) &= 2x + f'(x) \\ 2f(x) - 2 + f'(x) &= 2x \\ f'(x) &= -2f(x) + 2x + 2 \\ \implies f(x) &= x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2x}\end{aligned}$$

□

2.2 非线性 ODE

2.2.1 变量分离方程

Definition 2.2. 若 ODE 可写成

$$y' = f(x)g(y)$$

则称其为变量分离方程.

Problem 2.3. 求解变量分离方程:

$$y' = f(x)g(y)$$

其中 $f(x) \in C(I), g(y) \in C(J)$.

Solution. • 若 $g(y^*) \equiv 0$, 则 $y = y^*$ 是解.

• 若 $g(y) \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} \frac{dy}{g(y)} &= f(x) dx \\ \Rightarrow \left(\int \frac{dy}{g(y)} \right)' &= f(x) \\ \Rightarrow \left(\int \frac{dy}{g(y)} \right) &= \int f(x) dx + C \quad \forall C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

□

Example 2.3 (人口增长 Logistic 模型).

$$\begin{cases} p' = (a - bp)p \\ p(0) = p_0 \end{cases}$$

Solution. • $(a - bp)p = 0 \Rightarrow p = 0, p = \frac{a}{b}$

• $p \neq 0, \frac{a}{b}$

$$\begin{aligned} \frac{p'}{(a - bp)p} &= 1 \\ \Rightarrow \int \frac{dp}{(a - bp)p} &= \int dt + C \quad \forall C \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \ln \left| \frac{p}{a - bp} \right| &= at + C_1 \\ \Rightarrow \frac{p}{a - bp} &= Ce^{at} \\ \Rightarrow p &= \frac{aCe^{at}}{1 + bCe^{at}} \end{aligned}$$

由初值条件 $p(0) = p_0$ 可得:

$$\frac{1}{C} = e^{at_0} \left(\frac{a}{p_0} - b \right)$$

$$\implies p = \frac{a}{\left(\frac{a}{p_0} - b \right) e^{-a(t-t_0)} + b}$$

□

Example 2.4.

$$\begin{cases} yy' + (1 + y^2) \sin x = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Solution.

$$\frac{yy'}{1 + y^2} = -\sin x$$

$$\implies \int \frac{y dy}{1 + y^2} = \cos x + C_1$$

$$\implies \frac{1}{2} \ln(1 + y^2) = \cos x + C_1$$

$$\implies 1 + y^2 = e^{2\cos x + C_2} = C e^{2\cos x}$$

$$C = 2e^{-2}$$

$$\implies 1 + y^2 = 2e^{-4\sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$\implies y = \sqrt{2e^{-4\sin^2 \frac{x}{2}} - 1}$$

对于解存在区间我们考虑边界点 x^* :

$$2e^{-4\sin^2 \frac{x^*}{2}} - 1 = 0$$

$$\implies 4\sin^2 \frac{x^*}{2} = \ln 2$$

$$\implies x^* = \pm 2 \arcsin \frac{\sqrt{\ln 2}}{2}$$

注意到 $y(x^*) = 0$ 有定义, 但是 $y'(x^*) = \infty$. 因此解的存在区间为

$$\left(-2 \arcsin \frac{\sqrt{\ln 2}}{2}, 2 \arcsin \frac{\sqrt{\ln 2}}{2} \right)$$

□

事实上, 线性 ODE 与非线性 ODE 有如下差别

线性 ODE	非线性 ODE
Cauchy 问题 \implies 存在唯一解	不一定
系数 $\in C(I) \implies$ 解在 I 上存在	不一定
不同初值, 解存在区间一样	不一定

Example 2.5. 证明 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} y' = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

有无穷多解.

Solution. $y(x) \equiv 0 \quad x \in \mathbb{R}$

$y \neq 0$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{dy}{y^{\frac{1}{3}}} = dx$$

$$\implies y^{\frac{2}{3}} = x + C$$

$$\implies y = \pm(x + C)^{\frac{3}{2}} \quad x \in (-C, +\infty), C \in \mathbb{R}$$

□

2.2.2 齐次方程

这里的「齐次」不同于前面提到的线性齐次 ODE.

Definition 2.3. 若 $\forall \lambda \neq 0$, 成立

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$$

则称 $f(x, y)$ 为 k 次齐次函数.

下面要求 $f(x, y)$ 为 0 次齐次函数.

取 $\lambda = \frac{1}{x}$, 则有

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \triangleq g\left(\frac{y}{x}\right)$$

令 $u = \frac{y}{x} \implies y = ux$, 则

$$y' = u + xu' = g(u)$$

$$\implies u' = \frac{g(u) - u}{x}$$

转化为变量分离方程.

Example 2.6. 求解 ODE:

$$y' = \frac{x + y}{x - y}$$

Solution. 令 $u = \frac{y}{x} \implies y = ux$, 则

$$y' = u + xu' = \frac{1 + u}{1 - u}$$

$$\implies u' = \frac{1 + u}{x(1 - u)} - \frac{u}{x} = \frac{1 + u^2}{x(1 - u)}$$

变量分离:

$$\begin{aligned}\frac{1-u}{1+u^2} du &= \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow \int \frac{1-u}{1+u^2} du &= \int \frac{dx}{x} + C \\ \Rightarrow \arctan u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) &= \ln|x| + C \\ \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} &= Ce^{\arctan \frac{y}{x}}\end{aligned}$$

□

Example 2.7. 求解 ODE:

$$y' = \frac{x+y+1}{x-y+2}$$

Solution. 转换的思想, 希望找到 ξ, η 使得

$$\begin{aligned}\frac{d\eta}{d\xi} &= \frac{\xi+\eta}{\xi-\eta} \\ \begin{cases} \xi = x + \alpha \\ \eta = y + \beta \end{cases} & \quad (\text{平移}) \\ \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}, \beta = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

2.2.3 伯努利方程

Problem 2.4. 求解伯努利方程:

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha$$

其中 $p(x), q(x) \in C(I), \alpha \neq 0, 1$.

Solution.

$$y' y^{-\alpha} = p(x) y^{1-\alpha} + q(x)$$

令 $z = y^{1-\alpha}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow z' &= (1-\alpha) y^{-\alpha} y' \\ &= (1-\alpha)p(x)z + (1-\alpha)q(x)\end{aligned}$$

转化为线性方程.

特解: $\alpha > 0, y \equiv 0$. (可能舍去)

□

2.2.4 Ricatti 方程

Problem 2.5.

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = k(x)$$

已知有解 $y = y_1(x)$, 求通解.

Solution. 令 $u = y - y_1$

$$u' + [p(x) + 2q(x)y_1]u + q(x)u^2 = 0$$

为伯努利方程. □

Example 2.8. 求解 ODE:

$$y' + y^2 = \frac{6}{x^2}$$

Solution. 猜测有解 $y = \frac{c}{x}$.

$$-\frac{c}{x^2} + \frac{c^2}{x^2} = \frac{6}{x^2} \implies c^2 - c - 6 = 0$$

解得 $c = -2, 3$, 取 $y_1 = \frac{3}{x}$. 令 $u = y - \frac{3}{x}$:

$$\begin{aligned} u' - \frac{3}{x^2} + u^2 + \frac{6}{x}u + \frac{9}{x^2} &= \frac{6}{x^2} \\ \implies u' + \frac{6}{x}u + u^2 &= 0 \end{aligned}$$

$u \equiv 0$ 是解. 下面 $u \neq 0$, 令 $z = u^{-1}$:

$$\begin{aligned} z' &= \frac{6}{x}z - 1 \\ \implies z &= Cx^6 + \frac{1}{5}x \\ \implies u &= \frac{1}{Cx^6 + \frac{1}{5}x} \\ \implies y &= \frac{3Cx^5 + \frac{8}{5}}{x(Cx^5 + \frac{1}{5})} \end{aligned}$$
□

事实上, 对于

$$y' + y^2 = bx^m \quad x \neq 0, y \neq 0$$

在 $m = 0, -2, \frac{-4k}{2k+1}, \frac{-4k}{2k-1}$ ($k \in \mathbb{N}$) 时可变成变量分离方程.

2.2.5 全微分方程

又称为恰当方程.

Definition 2.4 (全微分). 当 $f(x, y) \in C'(\Omega)$:

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Definition 2.5 (格林公式 (曲线积分)). 记闭合曲线 L 所围成的区域为 Ω , 则有:

$$\oint_L M dx + N dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

Definition 2.6 (全微分方程). 若 $\exists F(x, y)$ 使得

$$dF(x, y) = M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

则称 $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ 为**全微分方程**. 其中 $F(x, y)$ 为原函数.

注意到:

$$\begin{cases} M = F_x \implies M_y = (F_x)_y \\ N = F_y \implies N_x = (F_y)_x \end{cases}$$

Theorem 2.2. 设 $M(x, y), N(x, y) \in C'(\Omega)$, 则

$$M dx + N dy = 0$$

是恰当方程的充分必要条件为

$$M_y = N_x$$

Solution.

$$\begin{aligned} & M dx + N dy = 0 \\ \implies & M_y = N_x \\ \implies & \exists F(x, y) \text{ s.t. } \begin{cases} F_x = M \\ F_y = N \end{cases} \\ \implies & M dx + N dy = 0 \end{aligned}$$

□

Example 2.9. 求解 ODE:

$$(3x^2y + 8xy^2) dx + (x^3 + 8x^2y + 12y^2) dy = 0$$

Solution. (Solution 1) 注意到: $M_y = 3x^2 + 16xy = N_x$ 为全微分方程.

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int M dx + f(y) = x^3y + 4x^2y^2 + f(y) \\ \implies F_y &= x^3 + 8x^2y + f'(y) = N \\ \implies f'(y) &= 12y^2 \\ \implies f(y) &= 4y^3 \\ \implies F(x, y) &= x^3y + 4x^2y^2 + 4y^3 \end{aligned}$$

因此通解为:

$$x^3y + 4x^2y^2 + 4y^3 = C$$

(Solution 2) 找 F s.t.

$$\begin{cases} F_x = M = 3x^2y + 8xy^2 \\ F_y = N \end{cases}$$

我们固定 y , 原式为关于 x 的 ODE.

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int (3x^2y + 8xy^2) dx + C \\ &= x^3y + 4x^2y^2 + C \end{aligned}$$

我们固定了 y , 因此 C 与 y 有关, 记为 $C(y)$.

$$\begin{aligned} \implies F_y &= x^3 + 8x^2y + C'(y) = x^3 + 8x^2y + 12y^2 \\ \implies C(y) &= 4y^3 \\ \implies F(x, y) &= x^3y + 4x^2y^2 + 4y^3 \end{aligned}$$

(Solution 3) 凑! 注意到原式可写为:

$$\begin{aligned} &(3x^2y dx + x^3 dy) + (8xy^2 dx + 8x^2y dy) + (12y^2 dy) = 0 \\ \implies &d(x^3y) + d(4x^2y^2) + d(4y^3) = 0 \\ \implies &d(x^3y + 4x^2y^2 + 4y^3) = 0 \\ \implies &x^3y + 4x^2y^2 + 4y^3 = C \end{aligned}$$

□

那如果 $M dx + N dy = 0$ 但 $M_y \neq N_x$ 呢? 我们希望找到积分因子 $\mu \neq 0$ 使得

$$\mu M dx + \mu N dy = 0$$

为全微分方程, 即

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x$$

我们考虑一些特殊的 μ .

- $\mu = \mu(x)$

$$\begin{aligned} &(\mu M)_y = (\mu N)_x \\ \iff &\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x \\ &\mu_y = 0 \\ \iff &\frac{\mu'}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N} \quad \text{仅与 } x \text{ 有关} \\ \iff &\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx} \end{aligned}$$

- $\mu = \mu(y)$

$$\begin{aligned}
 (\mu M)_y &= (\mu N)_x \\
 \iff \mu_y M + \mu M_y &= \mu_x N + \mu N_x \\
 \mu_x &= 0 \\
 \iff \frac{\mu'}{\mu} &= \frac{N_x - M_y}{M} \quad \text{仅与}y\text{有关} \\
 \iff \mu(y) &= e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}
 \end{aligned}$$

Example 2.10. 求解 ODE:

$$(3x^3 + y) dx + (2x^2y - x) dy = 0$$

Solution. 注意到 $M_y = 1, N_x = 4xy - 1$, 因此

$$\frac{M_y - N_x}{N} = -\frac{2}{x} \quad \text{仅与}x\text{有关}$$

因此积分因子为:

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = x^{-2} \quad (x \neq 0)$$

原方程变为:

$$\begin{aligned}
 (3x + \frac{y}{x^2}) dx + (2y - \frac{1}{x}) dy &= 0 \\
 \implies d\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{y}{x} + y^2\right) &= 0 \\
 \implies \frac{3}{2}x^2 + \frac{y}{x} + y^2 &= C
 \end{aligned}$$

□

我们只讨论了 $\mu = \mu(x)$ 或 $\mu = \mu(y)$ 的情况, 事实上我们希望能够证明:

Theorem 2.3. 对于 $\forall M, N \in C'(\Omega)$ 都存在对应的积分因子 μ .

Solution. 假设

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

有通解 $F(x, y) = C$, 则

$$\begin{aligned}
 dF &= F_x dx + F_y dy = 0 \\
 \implies \frac{F_x}{M} &= \frac{F_y}{N} \triangleq \mu(x, y)
 \end{aligned}$$

因此积分因子存在.

□

Theorem 2.4. 设 $M dx + N dy = 0$ 有积分因子 $\mu \neq 0$, 则 $\varphi(F(x, y))\mu(x, y)$ 也是积分因子.

Solution.

$$\begin{aligned}
 \mu(M dx + N dy) &= d(F(x, y)) \\
 \implies \varphi(F)\mu(M dx + N dy) &= \varphi(F)d(F) = d\left(\int \varphi(F) dF\right)
 \end{aligned}$$

□

Example 2.11. 求解 ODE:

$$\left(\frac{y}{x} + 3x^2\right) dx + \left(1 + \frac{x^3}{y}\right) dy = 0$$

Solution.

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} dx + dy = 0 &\implies \mu_1 = x \quad F_1 = xy + C \\ 3x^2 dx + \frac{x^3}{y} dy = 0 &\implies \mu_2 = y \quad F_2 = x^3 y + C \end{aligned}$$

希望找到公共积分因子:

$$\mu = \mu_1 \cdot \varphi(F_1) = \mu_2 \cdot \psi(F_2)$$

(猜)

$$\begin{aligned} x(xy)^\alpha &= y(x^3 y)^\beta \\ \implies \begin{cases} 1 + \alpha = 3\beta \\ \alpha = 1 + \beta \end{cases} \\ \implies \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

由此我们得到:

$$\begin{aligned} \mu &= x^3 y^2 \\ F &= \frac{1}{3} x^3 y^3 + \frac{1}{2} x^6 y^2 = C \end{aligned}$$

□

2.3 一般形式

考虑一般形式的一阶 ODE:

$$F(x, y, y') = 0$$

令 $p = y'$, 则 $F(x, y, p) = 0$ 是 \mathbb{R}^3 上的 2D 平面.

希望找到 (s, t) 使得:

$$\begin{cases} x = x(s, t) \\ y = y(s, t) \\ p = p(s, t) \end{cases}$$

找 $F(x, y, p)$ 上的一条曲线, 使得:

$$\begin{aligned} dy &= p dx \\ \implies dy(s, t) &= p(s, t) dx(s, t) \\ \implies y_s ds + y_t dt &= p(x_s ds + x_t dt) \\ \implies \frac{dt}{ds} \end{aligned}$$

下面给出一些特殊情况.

Example 2.12. 求解可化为 $y = f(x, y')$ 的 ODE:

$$x(y')^2 - 2yy' + 9x = 0$$

Solution. 令 $p = y'$, 则

$$y = \frac{xp^2 + 9x}{2p} = \frac{xp}{2} + \frac{9x}{2p} \quad (*)$$

代入 $dy = p dx$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{9}{2p} - \frac{p}{2}\right) dx + \left(\frac{x}{2} - \frac{9x}{2p^2}\right) dp = 0 \\ \Rightarrow & \left(\frac{1}{2} - \frac{9}{2p^2}\right) (x dp - p dx) = 0 \\ \Rightarrow & p = \pm 3 \quad \text{或} \quad p = Cx \end{aligned}$$

代回 (*) 可得:

$$y = \pm 3x \quad \text{或} \quad y = \frac{C}{2}x^2 + \frac{9}{2C}$$

□

Example 2.13. 求解可化为 $x = f(y, y')$ 的 ODE:

$$(y')^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$$

Solution. 令 $p = y'$, 则

$$x = \frac{p^3 + 8y^2}{4yp} - \frac{p^2}{4y} + \frac{2y}{p} \quad (*)$$

代入 $dy = p dx$:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{p^3}{4y^2}\right) dy + \left(\frac{p^2}{2y} - \frac{2y}{p}\right) dp = 0 \\ \Rightarrow & \left(1 - \frac{p^3}{4y^2}\right) \left(dy - \frac{2y}{p} dp\right) = 0 \\ \Rightarrow & 1 = \frac{p^3}{4y^2} \quad \text{或} \quad dy = \frac{2y}{p} dp \\ \Rightarrow & p = (2y)^{\frac{2}{3}} \quad \text{或} \quad p = C\sqrt{y} \end{aligned}$$

代回 (*) 可得:

$$y = \frac{4}{27}x^3 \quad \text{或} \quad y = C(x - C)^2$$

□

2.4 奇解

Definition 2.7. 对于 $F(x, y, y') = 0$ 有通解的曲线族 $\Gamma = \{(x, y), y = \psi(x), x \in I\}$. 若存在不属于 Γ 的另一个解 $y = \varphi(x), x \in I$, 对于任意 $y = \varphi(x)$ 上的点 (x_0, y_0) , 均存在一条曲线 $\phi(x) \in \Gamma$ 与 $y = \varphi(x)$ 在 (x_0, y_0) 处相切, 则称 $y = \varphi(x)$ 为 $F(x, y, y') = 0$ 的奇解.

$F(x, y, y') = 0$ 的所有解 = 通解族 + 奇解.

Example 2.14 (克莱罗方程). 求解 ODE:

$$y = xy' + f(y')$$

其中, $f'' \neq 0$

Solution. 令 $p = y'$, 则

$$\begin{aligned} y &= xp + f(p) \\ \implies p dx &= x dp + p dx + f'(p) dp \\ \implies (x + f'(p)) dp &= 0 \\ \implies x + f'(p) = 0 &\text{ 或 } dp = 0 \\ \implies \text{求解 } \begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -pf'(p) + f(p) \end{cases} \\ \text{或 } y &= xC + f(C) \end{aligned}$$

□

我们希望不求通解, 直接求出奇解.

Theorem 2.5. $F(x, y, p) \in C(G)$, $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial p} \in C(G)$, 若 $y = \varphi(x), x \in I$ 是奇解, 则满足:

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ F_p(x, y, p) = 0 \end{cases}$$

其中 $y = \varphi(x), p = \varphi'(x), x \in I$. 这个方程组称为 p -判别式, 消去 p 后得到的方程 $c(x, y) = 0$ 称为 p -判别曲线.

Solution. 这里使用了隐函数定理与 Picard 定理进行证明, 我们会在后面进一步学习.

反证: 设存在某个 $x_0 \in I, F_p(x_0, \varphi(x_0), \varphi'(x_0)) \neq 0$. 根据奇解的定义, $(x_0, \varphi(x_0))$ 附近有不同解 $\varphi(x), \psi(x)$. 这两个都是 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = \varphi(x_0) \end{cases}$ 的解.

由 Picard 定理, $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = \varphi(x_0) \end{cases}$ 存在唯一解, 矛盾!

□

总结一下 对于 $F(x, y, p) = 0$, 若根据 p -判别式得到的 p -判别曲线 $y = \varphi(x)$ 满足:

$$\begin{cases} F_y(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \neq 0 \\ F_{pp}(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \neq 0 \quad \forall x \in I \\ F_p(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0 \end{cases}$$

则 $y = \varphi(x)$ 是奇解.

2.5 可降阶二阶 ODE

对于一般的 $y'' = f(x, y, y')$ 的求解, 我们会在第 3 章进行更详细的学习, 但是有一些特殊的情况, 使得我们能够变成将它一阶 ODE 来求解. 下面我们讨论三种特殊的情形.

1. $y'' = f(x)$

$$\begin{aligned} y' &= \int f(x) dx + C_1 \\ \implies y &= \int \left(\int f(x) dx + C_1 \right) dx + C_2 \end{aligned}$$

2. $y'' = f(x, y')$

$$\begin{aligned} p &= y' \\ \implies p' &= f(x, p) \\ \implies p &= \varphi(x, C_1) \\ \implies y &= \int \varphi(x, C_1) dx + C_2 \end{aligned}$$

3. $y'' = f(y, y')$

$$\begin{aligned} p &= y' \\ \implies p' &= \frac{dp}{dy} \cdot p = f(y, p) \\ \implies p &= p(y, C_1) \\ \implies y' &= p(y, C_1) \\ \implies y &= \varphi(x, C_1, C_2) \end{aligned}$$

3 线性常微分方程组 (LODEs)

这一章我们讨论如下的 n 阶线性常微分方程组:

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ \vdots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases}$$

转化成向量形式, 即为求解:

$$\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} + \mathbf{F}(t)$$

在求解之前, 我们最先考虑的肯定是解存在吗?

3.1 解的存在性与唯一性

Theorem 3.1.

$$\begin{cases} \mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} + \mathbf{F}(t) \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{cases}$$

在区间 I 上存在唯一解.

思路 我们证明简单一点的情况:

$$\begin{cases} \mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{cases} \quad (*)$$

将 (*) 转化为积分方程:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t A(s)\mathbf{X}(s) ds$$

应用 Picard 迭代序列:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_0(t) &= \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}_{n+1}(t) &= \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t A(s)\mathbf{X}_n(s) ds \end{aligned}$$

用数学归纳法可得 $\mathbf{X}_k \in C(I)$, $k = 1, 2, \dots$ 接着我们证明 $\{\mathbf{X}_n\}$ 是 $C(I)$ 上的 Cauchy 列. 这样 $\{\mathbf{X}_n\}$ 所收敛的极限即为所求解.

准备工作 对于实数列的一致收敛, 我们是通过绝对值来度量的. 此时, 我们需要一个类似的工具.

Definition 3.1. 对于 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 定义 **范数**为:

$$\|\mathbf{X}\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

与此同时, 我们也定义矩阵的范数:

$$\|A\| = \sum \sum |a_{ij}|$$

Lemma 3.2. 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$, 则

$$\|\mathbf{A}\mathbf{X}\| \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{X}\|$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

Definition 3.2. $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall m, n > N$

$$\|\mathbf{X}_m(t) - \mathbf{X}_n(t)\| < \varepsilon \quad (\forall t \in I)$$

则称 $\{\mathbf{X}_n\}$ 为 $C(I)$ 上的 **Cauchy 列**, $\{\mathbf{X}_n\}$ 一致收敛于 $\mathbf{X}(t)$, 记为:

$$\mathbf{X}_n(t) \Rightarrow \mathbf{X}(t)$$

有了这些我们就可以证明 **Theorem 3.1** 了.

Solution. 构造 Picard 迭代序列:

$$\mathbf{X}_0(t) = \mathbf{X}_0$$

$$\mathbf{X}_{n+1}(t) = \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t A(s)\mathbf{X}_n(s) ds$$

由数学归纳法可知 $\mathbf{X}_n \in C(I), n = 1, 2, \dots$ 下面我们证明 $\{\mathbf{X}_n\}$ 是 $C(I)$ 上的 Cauchy 列.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}_1(t) - \mathbf{X}_0(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|A\mathbf{X}_0\| ds \\ &\leq \sup \|A(t)\| \|\mathbf{X}_0\| (t - t_0) \\ &\leq D(t - t_0) \end{aligned}$$

其中 $C = \sup \|A(t)\|, D = C\|\mathbf{X}_0\|$. 因此我们得到:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}_2(t) - \mathbf{X}_1(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|A(\mathbf{X}_1(s) - \mathbf{X}_0(s))\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t \|A\| \|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t CD(s - t_0) ds \\ &= \frac{1}{2} CD(t - t_0)^2 \end{aligned}$$

以此类推, 由数学归纳法, 我们得到:

$$\|\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k\| \leq \frac{1}{(k+1)!} C^k D(t - t_0)^{k+1}$$

因此对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $k > h > N$ 时, 有:

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_h)(t)\| &\leq \sum_{m=h}^{k-1} \|\mathbf{X}_{m+1}(t) - \mathbf{X}_m(t)\| \\ &\leq \sum_{m=h}^{k-1} \frac{D}{C} \cdot \frac{[C(t - t_0)]^{m+1}}{(m+1)!} \\ &\leq \frac{D}{C} \varepsilon \end{aligned}$$

即一致收敛. 设 $\mathbf{X}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{X}_n(t)$, 则 $\mathbf{X}(t)$ 即为积分方程的解. 由微积分基本定理可知 $\mathbf{X}(t)$ 也是原微分方程的解, **存在性**得证.

下面证明**唯一性**, 假设 $\mathbf{X}_1(t)$ 和 $\mathbf{X}_2(t)$ 都是微分方程的解. 则

$$\begin{cases} (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)' = A(t)(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) \\ (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)(t_0) = 0 \end{cases}$$

因此

$$\|\mathbf{X}_1(t) - \mathbf{X}_2(t)\| \leq \int_{t_0}^t C \|\mathbf{X}_1(s) - \mathbf{X}_2(s)\| ds$$

由 Gronwall 不等式可知 $\|\mathbf{X}_1(t) - \mathbf{X}_2(t)\| = 0$, 即 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$, 矛盾! **唯一性**得证. \square

3.2 解的形式

先考虑 n 阶齐次 LODEs:

$$\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} \quad (*)$$

容易发现 $\{(*) \text{ 的解 } \mathbf{X}(t)\}$ 是一个线性空间. 自然地, 我们猜测这个线性空间是 n 维的, 那么只需找到 n 个解形成极大线性无关组

$$\{\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \dots, \mathbf{X}_n(t)\}$$

即可得到齐次方程的通解:

$$C_1\mathbf{X}_1(t) + C_2\mathbf{X}_2(t) + \dots + C_n\mathbf{X}_n(t)$$

考虑

$$\begin{cases} \mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \end{cases} \longrightarrow \mathbf{X}_1(t)$$

$$\begin{cases} \mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)^T \end{cases} \longrightarrow \mathbf{X}_2(t)$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} \mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)^T \end{cases} \longrightarrow \mathbf{X}_n(t)$$

这样 $\{\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \dots, \mathbf{X}_n(t)\}$ 是否就是极大线性无关组呢?

Definition 3.3. 对于 $\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \dots, \mathbf{X}_n(t)$, 若存在不全为 0 的常数 c_1, c_2, \dots, c_n 使得

$$c_1\mathbf{X}_1(t) + c_2\mathbf{X}_2(t) + \dots + c_n\mathbf{X}_n(t) = 0 \quad (\forall t \in I)$$

则称 $\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \dots, \mathbf{X}_n(t)$ 线性相关, 否则称线性无关.

引入朗斯基行列式

$$W(t) = \det(\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \dots, \mathbf{X}_n(t))$$

Lemma 3.3. $\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \dots, \mathbf{X}_n(t)$ 是 $(*)$ 的 n 个解, 则 $\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \dots, \mathbf{X}_n(t)$ 线性无关的充分必要条件为 $W(t) \neq 0$, 即朗斯基行列式恒不为零.

Solution. (Sufficiency)

$$c_1 \mathbf{X}_1(t) + c_2 \mathbf{X}_2(t) + \dots + c_n \mathbf{X}_n(t) = 0$$

则

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1(t) & \mathbf{X}_2(t) & \dots & \mathbf{X}_n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = 0$$

因为 $W(t) \neq 0$, 所以系数行列式非零, 因此 $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, 即 $\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \dots, \mathbf{X}_n(t)$ 线性无关.

(Necessity) 用逆否命题来进行证明.

$$\exists t_0, W(t_0) = 0 \implies \mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \dots, \mathbf{X}_n(t) \text{ 线性相关}$$

在 $t = t_0$ 时,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1(t_0) & \mathbf{X}_2(t_0) & \dots & \mathbf{X}_n(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = 0W(t_0) = 0$$

因此存在非零解 \mathbf{c} , 即

$$c_1 \mathbf{X}_1(t_0) + c_2 \mathbf{X}_2(t_0) + \dots + c_n \mathbf{X}_n(t_0) = 0$$

设 $\mathbf{Y}(t) = c_1 \mathbf{X}_1(t) + c_2 \mathbf{X}_2(t) + \dots + c_n \mathbf{X}_n(t)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{Y}' = A(t)\mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}(t_0) = 0 \end{cases}$$

由 **Theorem 3.1** 可知 $\mathbf{Y}(t) \equiv 0$. □

Lemma 3.4 (Liouville 公式). 设 $\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \dots, \mathbf{X}_n(t)$ 是 *LODEs* 的 n 个解, 则朗斯基行列式满足:

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{tr} A(s) ds}$$

其中 $\text{tr} A(t)$ 为矩阵 $A(t)$ 的迹.

Solution. 目标: 证明 $W'(t) = \text{tr} A(t) \cdot W(t)$. 令 $\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix}$, 则

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_{11} & x'_{12} & \dots & x'_{1n} \\ x'_{21} & x'_{22} & \dots & x'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x'_{n1} & x'_{n2} & \dots & x'_{nn} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x'_{n1} & x'_{n2} & \dots & x'_{nn} \end{bmatrix}$$

而 $\mathbf{X}'_1 = A\mathbf{X}_1$, 因此:

$$\begin{aligned} x'_{1k} &= \sum_{j=1}^n a_{1j}x_{jk} \\ \implies x_{ik} &= \sum_{j=1}^n a_{ij}x_{jk} \end{aligned}$$

得到:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W(t) &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{1j}x_{jn} \\ x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{nj}x_{jn} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{1j} \begin{bmatrix} x_{j1} & \cdots & x_{jn} \end{bmatrix} + \cdots + \sum_{j=1}^n a_{nj} \begin{bmatrix} x_{j1} & \cdots & x_{jn} \end{bmatrix} \\ &= a_{11} \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \end{bmatrix} + \cdots + a_{nn} \begin{bmatrix} x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \text{tr } A(t) \cdot W(t) \end{aligned}$$

□

回到开头的问题, 我们考虑:

$$\begin{cases} \mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \end{cases} \longrightarrow \mathbf{X}_1(t)$$

$$\begin{cases} \mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)^T \end{cases} \longrightarrow \mathbf{X}_2(t)$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} \mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)^T \end{cases} \longrightarrow \mathbf{X}_n(t)$$

对于所有满足 $\begin{cases} \mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} \\ \mathbf{X}(t_0) \in \mathbb{R}^n \end{cases}$ 的解 $\mathbf{X}(t)$, $\exists \mathbf{X}(t_0) = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + \cdots + c_n\mathbf{e}_n$. 令 $\mathbf{Y}(t) = c_1\mathbf{X}_1(t) + c_2\mathbf{X}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{X}_n(t)$, 我们得到:

$$\begin{cases} (\mathbf{X} - \mathbf{Y})' = A(t)(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \\ (\mathbf{X} - \mathbf{Y})(t_0) = 0 \end{cases}$$

由 **Theorem 3.1** 可知 $\mathbf{X}(t) \equiv \mathbf{Y}(t)$, 因此 $\{\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \dots, \mathbf{X}_n(t)\}$ 构成了齐次方程的一个极大线

性无关组，齐次方程的通解为:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1(t) & \mathbf{X}_2(t) & \cdots & \mathbf{X}_n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} \\ &= \Phi(t)\mathbf{C} \end{aligned}$$

其中 $\Phi(t)$ 称为基解矩阵.

Corollary 3.5. 若 $LODEs$ 有基解矩阵 $\Phi(t)$ ，则对所有的可逆的 \mathbf{C} ， $\Phi\mathbf{C}$ 也是基解矩阵.

对于一般的 $LODEs$:

$$\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} + \mathbf{B}(t)$$

设解为 $\mathbf{X}(t) = \Phi\mathbf{U}(t)$ ，则

$$\begin{aligned} \Phi\mathbf{U}' + \Phi'\mathbf{U} &= A(t)\Phi\mathbf{U} + \mathbf{B}(t) \\ \implies \Phi\mathbf{U}' &= \mathbf{B}(t) \\ \implies \mathbf{U}' &= \Phi^{-1}\mathbf{B}(t) \\ \implies \mathbf{U} &= \int \Phi^{-1}\mathbf{B}(t) dt + \mathbf{C} \end{aligned}$$

那现在的问题是，如何求出基解矩阵 $\Phi(t)$?

3.3 求解方法

3.3.1 分析角度

对于 ODE ，由 $y' = py$ 可得 $y = c \cdot e^{\int p dt}$ ；但是对于 $LODEs$ $\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X}$ ，如果直接套用指数函数 $\mathbf{X} = e^{\int A(t) dt}\mathbf{C}$ ，则会遇到指数为矩阵的情况. 我们需要对这个矩阵指数进行定义.

我们知道

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

因此我们定义:

$$e^{\mathbf{D}(t)} = E + \mathbf{D}(t) + \frac{\mathbf{D}^2(t)}{2!} + \frac{\mathbf{D}^3(t)}{3!} + \cdots + \frac{\mathbf{D}^n(t)}{n!} + \cdots$$

因为 $\sup \|\mathbf{D}(t)\|$ 存在，所以该级数一致收敛，因此定义成立.

Theorem 3.6. 若 $A(t)$ 满足:

$$\mathbf{A}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{A}(s) ds = \int_{t_0}^t \mathbf{A}(s) ds \cdot \mathbf{A}(t)$$

则 $LODEs$ $\begin{cases} \mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{cases}$ 的解为:

$$\mathbf{X}(t) = e^{\int_{t_0}^t A(s) ds} \mathbf{X}_0$$

Lemma 3.7. 若 $AB = BA$, 则

$$e^{At+Bt} = e^{At} \cdot e^{Bt}$$

Solution.

$$\begin{aligned} e^{At} \cdot e^{Bt} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(Bt)^m}{m!} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^i B^j}{i! \cdot j!} t^{i+j} \quad (\text{考虑二次展开, } k = i + j) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \frac{1}{k!} \cdot \frac{k! A^i B^{k-i}}{i!(k-i)!} t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} t^k \quad (\text{这里用了 } AB = BA) \\ &= e^{(A+B)t} \end{aligned}$$

□

Example 3.1. 求解 ODE:

$$\begin{cases} \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix} \\ \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solution. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & 2t \end{pmatrix} = At$, $AD = DA$. 所以

$$\Phi = e^{At}$$

因为 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 因此

$$\begin{aligned} \Phi &= \exp \left(2Et + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t \right) \\ &= e^{2Et} \cdot \exp \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{2Et} &= E + 2Et + \frac{(2Et)^2}{2!} + \dots \\ &= E \left(1 + 2t + \dots + \frac{(2t)^n}{n!} \right) \\ &= e^{2t} E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t\right) &= E + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 t^2 + \dots \\
&= E + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \Phi &= e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

Claim 3.8.

$$\begin{aligned}
\exp\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} t\right] &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \\
\exp\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} t\right] &= \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^m}{m!} \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Corollary 3.9. 当 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$ 是 Jordan 型矩阵时, LODEs $\begin{cases} \mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{cases}$

的解能算出.

对任意的 A , 对其进行 Jordan 分解 $A = PJP^{-1}$, 则

$$\begin{aligned}
e^A &= E + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^m}{m!} + \cdots \\
&= E + PJP^{-1} + \frac{(PJP^{-1})^2}{2!} + \cdots + \frac{(PJP^{-1})^m}{m!} + \cdots \\
&= P \left(E + J + \frac{J^2}{2!} + \cdots + \frac{J^m}{m!} + \cdots \right) P^{-1} \\
&= Pe^J P^{-1}
\end{aligned}$$

所以

$$e^{At} = Pe^{Jt} P^{-1}$$

由此可得

$$e^{At} P = Pe^{Jt}$$

也是基解矩阵.

3.3.2 一重根

接下来我们考虑特征值都是一重根情形下的 n 阶 LODEs: 那么系数矩阵的 Jordan 型为

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

记每个特征值对应的特征向量为 \mathbf{r}_i , 则有

$$P = (\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{r}_n)$$

则基解矩阵为:

$$\begin{aligned} \Phi &= P e^{Jt} \\ &= (\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{r}_n) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{r}_1 e^{\lambda_1 t} \quad \mathbf{r}_2 e^{\lambda_2 t} \quad \cdots \quad \mathbf{r}_n e^{\lambda_n t}) \end{aligned}$$

Theorem 3.10. 矩阵 A 有 n 个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 对应的特征向量分别为 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$, 则 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ 的一个基解矩阵为:

$$\Phi(t) = (\mathbf{r}_1 e^{\lambda_1 t} \quad \mathbf{r}_2 e^{\lambda_2 t} \quad \cdots \quad \mathbf{r}_n e^{\lambda_n t})$$

通解为:

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \mathbf{r}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{r}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n \mathbf{r}_n e^{\lambda_n t}$$

可以发现 $\mathbf{r}_i e^{\lambda_i t}$ 是 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ 的一个非零解. 因此得到:

$$\lambda_i \mathbf{r}_i e^{\lambda_i t} = A \mathbf{r}_i e^{\lambda_i t}$$

即

$$A \mathbf{r}_i = \lambda_i \mathbf{r}_i$$

, 因此 λ_i 是 A 的特征值, \mathbf{r}_i 是对应的特征向量.

Example 3.2. 求解 ODE:

$$\begin{cases} x' = 7y + 4z \\ y' = -2x - 9y - 4z \\ z' = 3x + 9y + 3z \end{cases}$$

Solution. 设 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, 则

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ -2 & -9 & -4 \\ 3 & 9 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 7 & 4 \\ -2 & -9 - \lambda & -4 \\ 3 & 9 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$$

因此 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$, $\mathbf{r}_1 = (2, -2, 3)^T$, $\mathbf{r}_2 = (1, -2, 3)^T$, $\mathbf{r}_3 = (-1, 1, -1)^T$, 所以通解为:

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

□

注意到, 我们前面所讨论的都是考虑实数的情况, 但是在实际问题中, 矩阵的特征值可能是复数. 而我们希望我们的基解矩阵也只包含实数的解. 事实上

Theorem 3.11. 矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \alpha_1 + i\beta_1, \alpha_1 - i\beta_1, \alpha_2 + i\beta_2, \alpha_2 - i\beta_2, \dots, \alpha_m + i\beta_m, \alpha_m - i\beta_m$, 对应特征向量为

$$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{l}_1, \bar{\mathbf{l}}_1, \mathbf{l}_2, \bar{\mathbf{l}}_2, \dots, \mathbf{l}_m, \bar{\mathbf{l}}_m$$

则 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ 的一个基解矩阵为:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 e^{\lambda_1 t} & \mathbf{r}_2 e^{\lambda_2 t} & \dots & \mathbf{r}_n e^{\lambda_n t} \\ \operatorname{Re}(\mathbf{l}_1 e^{(\alpha_1 + i\beta_1)t}) & \operatorname{Im}(\mathbf{l}_1 e^{(\alpha_1 + i\beta_1)t}) & \dots & \operatorname{Re}(\mathbf{l}_m e^{(\alpha_m + i\beta_m)t}) & \operatorname{Im}(\mathbf{l}_m e^{(\alpha_m + i\beta_m)t}) \end{pmatrix}$$

Example 3.3. 求解 ODE:

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

Solution.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 1 = 0$$

因此 $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$, $\mathbf{l}_1 = (1, i)^T$,

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \cos t e^t \\ -\sin t e^t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t e^t \\ \cos t e^t \end{pmatrix}$$

因此基解矩阵为:

$$\Phi(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

通解为:

$$\mathbf{X} = e^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \mathbf{C}$$

□

3.3.3 多重根

这里我们考虑矩阵 A 的特征值为:

$$|A - \lambda E| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s} = 0$$

那么我们能够推出:

$$A = P \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix} P^{-1}$$

于是我们只需要找:

$$\Phi(t) = P e^{Jt} = P \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & & \\ & e^{J_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_s t} \end{bmatrix}$$

我们完全可以从代数的角度将 P 求解出来. 下面从分析的角度来讨论如何求解.

Example 3.4.

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$$

其中 A 可表示为 $P \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} P^{-1}$, 求解 $\Phi(t)$.

Solution. 记 $P = [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2]$. 并且我们有:

$$\begin{aligned} e^{At} P &= P e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2] \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{2t} \\ &= [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_1 t + \mathbf{r}_2] e^{2t} \end{aligned}$$

由基解矩阵的定义, $(\mathbf{r}_1 t + \mathbf{r}_2)e^{2t}$ 为 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ 的解, 即:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 e^{2t} + 2(\mathbf{r}_1 t + \mathbf{r}_2)e^{2t} &= A(\mathbf{r}_1 t + \mathbf{r}_2)e^{2t} \\ \implies \begin{cases} \mathbf{r}_1 + 2\mathbf{r}_2 = A\mathbf{r}_2 \\ 2\mathbf{r}_2 = A\mathbf{r}_1 \end{cases} \\ \implies (A - 2E)^2 \mathbf{r}_2 = 0, \mathbf{r}_1 &= (A - 2E)\mathbf{r}_2 \end{aligned}$$

□

Remark 3.1. $(A - 2E)^2 \mathbf{1} = 0$ 找出 2 个线性无关解 $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$. 则原方程有两个线性无关解:

$$\mathbf{X}_1 = (\mathbf{l}_1 + (A - 2E)\mathbf{l}_1 t)e^{2t}$$

$$\mathbf{X}_2 = (\mathbf{l}_2 + (A - 2E)\mathbf{l}_2 t)e^{2t}$$

一般地, 当 λ_1 是 A 的 n_1 重特征根, 那么我们找

$$(A - \lambda_1 E)^{n_1} \mathbf{1} = 0$$

的 n_1 个线性无关解 $\mathbf{l}_1^1, \mathbf{l}_2^1, \dots, \mathbf{l}_{n_1}^1$, 那么原方程有 n_1 个线性无关解:

$$\mathbf{X}_1^1 = \left[\mathbf{l}_1^1 + (A - \lambda_1 E)\mathbf{l}_1^1 t + \dots + \frac{(A - \lambda_1 E)^{n_s-1} \mathbf{l}_1^1 t^{n_s-1}}{(n_s - 1)!} \right] e^{\lambda_1 t}$$

\vdots

$$\mathbf{X}_{n_1}^1 = \dots$$

其他 λ_i 同理, 若为复数则取实部虚部. 最终我们得到 LODEs 的一个基解矩阵. 这个时候我们的基解矩阵是有无穷多个的, 那有没有什么特殊的性质呢?

Theorem 3.12. 对所有的基解矩阵 $\Phi(t)$, 都有:

$$e^{At} = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(0)$$

事实上, 我们还有如下结论:

Theorem 3.13. 若 λ 是矩阵 A 的 n 重特征值, 则

$$e^{At} = e^{\lambda t} \left[E + \frac{(A - \lambda E)t}{1!} + \frac{(A - \lambda E)^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{(A - \lambda E)^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} \right]$$

Example 3.5. 求解 ODE:

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases}$$

Solution. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$ (二重根). λ_1 对应特征向量分别为 $\mathbf{r}_1 = (1, 1, 1)^T$,

λ_2 对应特征向量为 $\mathbf{r}_2 = (1, -1, 0)^T, \mathbf{r}_3 = (1, 0, -1)^T$.

因此基解矩阵为:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

事实上, 我们还可以用前面学过的的解法. 注意到: $(x + y + z)' = 2(x + y + z)$, 因此:

$$x + y + z = c_1 e^{2t}$$

我们将方程组改写为:

$$\begin{cases} x' = c_1 e^{2t} - x \\ y' = c_1 e^{2t} - y \end{cases}$$

其中 $z = c_1 e^{2t} - x - y$ 也就不需要写出来了, 而这两个方程就是两个一阶线性方程. 我们可以很快求出:

$$\begin{cases} x = e^{-t} \left(c_2 + \frac{c_1}{3} e^{3t} \right) \\ y = e^{-t} \left(c_3 + \frac{c_1}{3} e^{3t} \right) \end{cases}$$

这样 z 也就出来了. □

一般地, 对于 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + B(t)$, 我们有公式:

$$\mathbf{X} = \Phi(t)\mathbf{C} + \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)B(t) dt$$

到那时这样就非常麻烦 (算逆矩阵再矩阵乘法再积分), 我们后面会学习更简便的方法.

4 线性常微分方程 (LODE)

这一部分我们考虑的是如下的方程:

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = f(t)$$

4.1 解的存在性

我们可以将其转化为如下的矩阵形式:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

那么我们可以写成

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}$$

的形式. 让我们将 \mathbf{A}, \mathbf{B} 写开:

$$\mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -p_n(t) & -p_{n-1}(t) & -p_{n-2}(t) & \cdots & -p_1(t) \end{pmatrix} \mathbf{Y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

根据前面的内容, 我们知道

Theorem 4.1. 当 $p_1(t), p_2(t), \cdots, p_n(t), f(t) \in C(I), t \in I$ 时, 方程

$$\begin{cases} \frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(t) \frac{dy}{dt} + p_n(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0^0, y'(t_0) = y_1^0, \cdots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}^0 \end{cases}$$

在区间 I 上存在唯一解.

同样我们也从齐次方程入手:

Theorem 4.2. 方程

$$\frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(t) \frac{dy}{dt} + p_n(t)y = 0$$

的通解为:

$$y(t) = c_1 \phi_1(t) + c_2 \phi_2(t) + \cdots + c_n \phi_n(t)$$

其中 $\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots, \phi_n(t)$ 是该方程的 n 个线性无关解, 被称为该方程的一组基本解组.

对于非齐次方程, 我们有如下结论:

Theorem 4.3. 方程

$$\frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(t) \frac{dy}{dt} + p_n(t)y = f(t)$$

的通解为:

$$y(t) = c_1 \phi_1(t) + c_2 \phi_2(t) + \cdots + c_n \phi_n(t) + y^*(t)$$

其中 $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)$ 是对应齐次方程的基本解组, $y^*(t)$ 是该非齐次方程的一个特解.

那么我们求解 n 阶 LODE 的关键就在于找到这 n 个线性无关解以及一个特解.

对于 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ 线性无关解, 对应到 LODEs 的:

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_1' \\ \phi_1'' \\ \vdots \\ \phi_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \phi_2' \\ \phi_2'' \\ \vdots \\ \phi_2^{(n-1)} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \phi_n \\ \phi_n' \\ \phi_n'' \\ \vdots \\ \phi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

这 n 个解也是线性无关的, 即朗斯基行列式

$$W(t) = \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) & \cdots & \phi_n(t) \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) & \cdots & \phi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(t) & \phi_2^{(n-1)}(t) & \cdots & \phi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \quad (*)$$

在区间 I 上恒不为零. 同时也等价于

$$\exists t_0 \in I, W(t_0) \neq 0$$

我们把 (*) 式也称为该线性方程的朗斯基行列式.

回忆一下前面关于朗斯基行列式的内容, 我们有 Liouville 公式, 同样在这里也适用:

Lemma 4.4 (Liouville 公式). 设 $W(t)$ 是 n 阶 LODE

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = 0$$

的朗斯基行列式, 则有:

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t p_1(\tau) d\tau}$$

Remark 4.1. 公式中 $\text{tr } A = -p_1(t)$

4.2 求解方式

我们先考虑求解齐次方程.

4.2.1 齐次方程

我们考虑如下的齐次方程:

$$L_n[y] = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = 0$$

其实就是要找基本解组 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$. 我们从二阶的入手, 即解答

Problem 4.1.

$$y'' + by' + cy = 0$$

(1) 将二阶 LODE 转化为二阶 LODEs

Solution. 令 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, 则有:

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

我们计算矩阵的特征值:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -c & -b - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

得到 λ_1, λ_2 , 最终通解形式为:

$$\mathbf{X} = c_1 \mathbf{r}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{r}_2 e^{\lambda_2 t}$$

其中 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 分别是 λ_1, λ_2 对应的特征向量. 我们取 \mathbf{X} 的第一个分量即为 y 的通解. □

根据这个求解方法, 我们感觉 y 应该长成 $e^{\lambda t}$ 的样子

(2) 猜测 $y = e^{\lambda t}$

Solution. 令 $y = e^{\lambda t}$, 代入方程:

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$

等价于

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

解得

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

(i) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为实数, 则

$$y_1 = e^{\lambda_1 t}, y_2 = e^{\lambda_2 t}$$

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \neq 0$$

所以通解为:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

(ii) $\lambda = \alpha \pm \beta i$ ($\beta \neq 0$), 则

$$y_1 = e^{\alpha t} \cos \beta t, y_2 = e^{\alpha t} \sin \beta t$$

$$y = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$$

(iii) $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2}$, 则

$$y_1 = e^{\lambda t}, y_2 = te^{\lambda t}$$

$$y = e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t)$$

□

Example 4.1.

$$y'' - 5y' + 4y = 0$$

Solution. 特征方程为:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

解得 $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$, 因此通解为:

$$y = c_1 e^{4t} + c_2 e^t$$

□

Example 4.2.

$$y'' + ay = 0$$

Solution. 特征方程为:

$$\lambda^2 + a = 0$$

(1) $a > 0$, 解得 $\lambda = \pm\sqrt{ai}$, 因此通解为:

$$y = c_1 \cos \sqrt{at} + c_2 \sin \sqrt{at}$$

(2) $a = 0$, 解得 $\lambda = 0$, 因此通解为:

$$y = c_1 + c_2 t$$

(3) $a < 0$, 解得 $\lambda = \pm\sqrt{-a}$, 因此通解为:

$$y = c_1 e^{\sqrt{-a}t} + c_2 e^{-\sqrt{-a}t}$$

□

事实上,

Theorem 4.5. 若特征方程为:

$$(\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s} = 0$$

那么我们有如下基本解组:

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \cdots, & t^{n_1-1} e^{\lambda_1 t}, \\ e^{\lambda_2 t}, & te^{\lambda_2 t}, & \cdots, & t^{n_2-1} e^{\lambda_2 t}, \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t}, & \cdots, & t^{n_s-1} e^{\lambda_s t} \end{array}$$

下面我们来说明为什么. 我们引入微分算子记号 $Dy = \frac{dy}{dx}$, 考虑二阶情形:

$$\begin{aligned} L_2[y] &= y'' + by' + cy = 0 \\ D^2y + bDy + cy &= 0 \\ (D^2 + bD + c)y &= 0 \\ (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y &= 0 \\ \implies (D - \lambda_2)y &= c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \implies y &= e^{\lambda_2 t} \left[c_2 + c_1 \int e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} dt \right] \end{aligned}$$

拓展到 n 阶情形 (a_i 为实数常数):

$$\begin{aligned} L_n[y] &= (D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n)y \\ &= (D - \lambda_1)^{n_1} (D - \lambda_2)^{n_2} \cdots (D - \lambda_s)^{n_s} y \\ &= 0 \end{aligned}$$

我们看 $(D - \lambda_1)^{n_1} y = 0$.

$$\begin{aligned} \because e^{-\lambda_1 t} (D - \lambda_1)y &= D(e^{-\lambda_1 t} y) \\ \therefore (D - \lambda_1)y &= e^{\lambda_1 t} D(e^{-\lambda_1 t} y) \\ \implies (D - \lambda_1)^2 y &= e^{\lambda_1 t} D^2(e^{-\lambda_1 t} y) \end{aligned}$$

由数学归纳法可得:

$$\begin{aligned} (D - \lambda_1)^{n_1} y &= e^{\lambda_1 t} D^{n_1}(e^{-\lambda_1 t} y) = 0 \\ \implies D^{n_1}(e^{-\lambda_1 t} y) &= 0 \\ \implies e^{-\lambda_1 t} y &= c_1 + c_2 t + \cdots + c_{n_1} t^{n_1-1} \\ \implies y &= e^{\lambda_1 t} (c_1 + c_2 t + \cdots + c_{n_1} t^{n_1-1}) \end{aligned}$$

同理其他 λ_i 也成立. 那么这些解线性无关吗?

我们知道 $1, t, \dots, t^{n_1-1}$ 线性无关, 因此 $e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{n_1-1}e^{\lambda_1 t}$ 线性无关. 同理其他 λ_i 也成立. 然后我们要考虑不同 λ_i 之间的线性无关性. 我们通过定义来进行证明.

Problem 4.2. 假设存在 $a_1, a_2, \dots, a_{n_1}, b_1, b_2, \dots, b_{n_2}$, 使得

$$\begin{aligned} a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 t e^{\lambda_1 t} + \cdots + a_{n_1} t^{n_1-1} e^{\lambda_1 t} \\ + b_1 e^{\lambda_2 t} + b_2 t e^{\lambda_2 t} + \cdots + b_{n_2} t^{n_2-1} e^{\lambda_2 t} = 0 \end{aligned}$$

证明 $a_i = 0, b_j = 0$

Solution. 我们可以将方程改写为

$$P_{n_1-1}(t)e^{\lambda_1 t} + Q_{n_2-1}(t)e^{\lambda_2 t} = 0$$

方程两边 $\times e^{-\lambda_2 t}$, 得到

$$P_{n_1-1}(t)e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + Q_{n_2-1}(t) = 0$$

两边对 t 进行 n_2 次求导:

$$P_{n_1-1}^{(n_2)}(t)e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + \dots + (\lambda_1 - \lambda_2)^{n_2}P_{n_1-1}(t) = 0$$

假设 $P_{n_1-1}(t) = c_mt^m + c_{m-1}t^{m-1} + \dots + c_0 \neq 0$ 那么

$$LHS = e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}[(\lambda_1 - \lambda_2)^{n_2}c_mt^m + \dots] = 0$$

因此 $(\lambda_1 - \lambda_2)^{n_2}c_m = 0$, 由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 所以 $c_m = 0$, 矛盾!

所以 $P_{n_1-1}(t) = 0$, 同理 $Q_{n_2-1}(t) = 0$. □

Example 4.3. 求解 ODE:

$$y''' - 3y'' + 4y = 0$$

Solution. 特征方程为: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0$, 解得:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2 \text{ (二重根)}$$

因此通解为:

$$y = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} + c_3te^{2t}$$

□

我们刚刚都假定了 λ 为实数, 那么如果 λ 为复数呢?

Theorem 4.6. 若特征值为:

$$\lambda_1, \dots, \lambda_s, \alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_l \pm i\beta_l$$

其中对应重数分别为:

$$n_1, \dots, n_s, m_1, \dots, m_l$$

则该方程的一组基本解组为:

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \dots, & t^{n_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\ \vdots & & & \\ e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t}, & \dots, & t^{n_s-1}e^{\lambda_s t}, \\ e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t, & te^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t, & \dots, & t^{m_1-1}e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t, \\ e^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t, & te^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t, & \dots, & t^{m_1-1}e^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t, \\ \vdots & & & \\ e^{\alpha_l t} \cos \beta_l t, & te^{\alpha_l t} \cos \beta_l t, & \dots, & t^{m_l-1}e^{\alpha_l t} \cos \beta_l t, \\ e^{\alpha_l t} \sin \beta_l t, & te^{\alpha_l t} \sin \beta_l t, & \dots, & t^{m_l-1}e^{\alpha_l t} \sin \beta_l t \end{array}$$

Example 4.4. 求解 ODE:

$$y^{(6)} - 2y^{(5)} + 4y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 2y' + 2y = 0$$

Solution. 特征方程解为:

$$\lambda_1 = i \text{ (二重根)}, \lambda_2 = -i \text{ (二重根)}, \lambda_3 = 1 + i, \lambda_4 = 1 - i$$

因此基础解组为:

$$\cos t, t \cos t, \sin t, t \sin t, e^t \cos t, e^t \sin t$$

通解为:

$$y = c_1 \cos t + c_2 t \cos t + c_3 \sin t + c_4 t \sin t + c_5 e^t \cos t + c_6 e^t \sin t$$

□

4.2.2 非齐次方程

我们考虑非齐次方程:

$$L_n[y] = f(t)$$

可以转换为对应的 LODEs

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y} + B(t)$$

进行求解. 当然我们希望能够直接求解. 二阶情况下:

$$\begin{aligned} L_2[y] &= y'' + by' + cy = f(t) \\ \implies (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y &= f(t) \\ \implies (D - \lambda_2)y &= e^{\lambda_1 t} \left(c_1 + \int e^{-\lambda_1 t} f(t) dt \right) \\ \implies y &= e^{\lambda_2 t} \left[c_2 + \int e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \left(c_1 + \int e^{-\lambda_1 t} f(t) dt \right) dt \right] \end{aligned}$$

我们发现通解的形式为: $y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + y_*$, 其中的**特解**

$$y_* = e^{\lambda_2 t} \int e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \left(\int e^{-\lambda_1 t} f(t) dt \right) dt$$

求出这个特解 y_* 比较麻烦, 但是对于一些特殊的 $f(t)$, 我们能够更直接求出特解 y_* .

(1) 当 $f(t) = P_m(t)e^{\alpha t} = (b_m t^m + \dots + b_0)e^{\alpha t}$, 可以采用 **待定系数法**

$$y_* = e^{\lambda_2 t} \int e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \left(\int P_m(t)e^{(\alpha - \lambda_1)t} dt \right) dt$$

(i) 若 $\alpha \neq \lambda_1, \lambda_2$, 则能够推得:

$$\begin{aligned} y_* &= e^{\lambda_2 t} \int e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \tilde{P}_m(t) e^{(\alpha - \lambda_1)t} dt \\ &= e^{\lambda_2 t} \tilde{\tilde{P}}_m(t) e^{(\alpha - \lambda_2)t} \\ &= \tilde{\tilde{P}}_m(t) e^{\alpha t} \end{aligned}$$

于是我们可以设 $y_* = Q_m(t)e^{\alpha t} = (c_m t^m + \dots + c_0)e^{\alpha t}$, 代入 $y'' + by' + cy = P_m(t)e^{\alpha t}$, 解出 c_i 即可.

(ii) 若 $\alpha = \lambda_1 \neq \lambda_2$. 则能够推得:

$$\begin{aligned} y_* &= e^{\lambda_2 t} \int e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \tilde{P}_m(t) e^{(\alpha - \lambda_1)t} dt \\ &= e^{\lambda_2 t} \int e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} t \tilde{P}_m(t) dt \\ &= e^{\lambda_2 t} \int e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \tilde{P}_{m+1}(t) dt \\ &= e^{\lambda_2 t} \tilde{\tilde{P}}_{m+1}(t) e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \\ &= \tilde{\tilde{P}}_{m+1}(t) e^{\alpha t} \\ &= t Q_m(t) e^{\alpha t} + \tilde{b}_0 e^{\alpha t} \end{aligned}$$

于是我们可以设 $y_* = t Q_m(t) e^{\alpha t}$, 代入 $y'' + by' + cy = P_m(t) e^{\alpha t}$, 解出 c_i 即可.

(iii) 若 $\alpha = \lambda_1 = \lambda_2$ 为二重根的情况. 则能够推得:

$$\begin{aligned} y_* &= e^{\lambda t} \int 1 \cdot \tilde{P}_{m+1}(t) dt \\ &= \tilde{\tilde{P}}_{m+2}(t) e^{\alpha t} \\ &= t^2 Q_m(t) e^{\alpha t} + \tilde{b}_1 t e^{\alpha t} + \tilde{b}_0 e^{\alpha t} \end{aligned}$$

于是我们可以设 $y_* = t^2 Q_m(t) e^{\alpha t}$, 代入 $y'' + by' + cy = P_m(t) e^{\alpha t}$, 解出 c_i 即可.

Example 4.5. 求解 ODE:

$$y'' + 3y' + 2y = 3t + 2$$

Solution. 对应齐次 ODE 的特征方程为:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

解得 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, 因此齐次方程通解为:

$$Y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

(待定系数法) 设 $y_*(t) = At + B$, 带入 LODE:

$$3A + 2(At + B) = 3t + 2$$

解得 $A = \frac{3}{2}$, $B = -\frac{5}{4}$, 因此特解为:

$$y_* = \frac{3}{2}t - \frac{5}{4}$$

因此通解为:

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + \frac{3}{2}t - \frac{5}{4}$$

□

Theorem 4.7. 若 $f(t) = P_m(t) e^{\alpha t}$, α 是 k 重根. 则可以设 $y_* = t^k Q_m(t) e^{\alpha t}$, 其中 $Q_m(t)$ 的 $m+1$ 个系数由待定系数法确定.

Example 4.6. 求解 ODE:

$$y''' + 9y' = t^2 e^{2t}$$

Solution.

$$\lambda^3 + 9\lambda = 0$$

解得 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \pm 3i$, 因此齐次方程通解为:

$$Y = c_1 + c_2 \cos 3t + c_3 \sin 3t$$

由于 $\alpha = 2$ 不是特征值, 因此设特解为:

$$y_* = (At^2 + Bt + C)e^{2t}$$

带入 LODE 解得: $A = \frac{1}{26}$, $B = -\frac{21}{338}$, $C = -\frac{285}{8788}$. 因此通解为:

$$y = c_1 + c_2 \cos 3t + c_3 \sin 3t + \left(\frac{1}{26}t^2 - \frac{21}{338}t - \frac{285}{8788} \right) e^{2t}$$

□

(2) 当 $f(t) = P_m(t)e^{\alpha t} \cos \beta t$ 时, 我们可以将其复化成

$$L_n[Y] = P_m(t)e^{(\alpha+i\beta)t}$$

解得

$$Y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n + Y_*$$

$$Y_* = t^k Q_m(t) e^{(\alpha+i\beta)t}$$

其中 k 为 $\alpha + i\beta$ 在特征方程中的重数. 然后取实部:

$$y = \operatorname{Re}(Y) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n + y_*$$

$$y_* = t^k e^{\alpha t} \left[\tilde{Q}_m(t) \cos \beta t - \tilde{\tilde{Q}}_m(t) \sin \beta t \right]$$

Theorem 4.8. 若 $f(t) = P_m(t)e^{\alpha t} \cos \beta t$, $\alpha + i\beta$ 是 k 重根. 则可以设

$$y_* = t^k e^{\alpha t} \left[\tilde{Q}_m(t) \cos \beta t - \tilde{R}_m(t) \sin \beta t \right]$$

其中 $\tilde{Q}_m(t), \tilde{R}_m(t)$ 的 $m+2$ 个系数由待定系数法确定.

4.2.3 常数变易法

我们考虑二阶情况. 大多数时候, $f(t)$ 并不是多项式与指数函数的乘积, 这时我们可以使用 **常数变易法**来求解非齐次方程.

对于方程:

$$y'' + by' + cy = f(t)$$

我们已经知道对应齐次方程的通解为:

$$Y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

其中 c_1, c_2 是常数. 但我们希望将 Y 这条式子变成非齐次方程的解, 那我们就需要将这两个常数变成函数, 即设:

$$y = u_1(t)y_1 + u_2(t)y_2$$

我们需要确定 $u_1(t), u_2(t)$. 对于一阶导数:

$$y' = u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2'$$

从一项变成了四项, 感觉有点多, 我们认为要求 $u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$, 因此得到:

$$\begin{cases} y' = u_1y_1' + u_2y_2' \\ y'' = u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2'' \\ +by' \quad \quad \quad +bu_1y_1' + bu_2y_2' \\ +cy \quad \quad \quad +cu_1y_1 + cu_2y_2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \quad \quad 0 \end{cases} = f(t)$$

得到方程组: $\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ u_1y_1' + u_2y_2' = f(t) \end{cases}$, 转换成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

那么我们为什么会想到这样去设定呢? 本质上还是利用了线性方程组 $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}$, 也就是:

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

我们知道线性方程组的求解公式是:

$$\mathbf{X} = \Phi(t)\mathbf{C} + \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{B}(t) dt$$

其中 $\Phi(t) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$. 我们是设 $\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} = \Phi(t)\mathbf{C}$, 代入线性方程组算的时候得到了:

$$\Phi(t)\mathbf{C}' = \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

这里的 \mathbf{C} 就是我们之前的 $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$. 因此我们的 \mathbf{C} 就是 $\Phi^{-1}\mathbf{B}$ 的积分, 而积分中出现的任意常数就给出了齐次方程的通解部分. 所以我们才会有线性方程组的求解公式:

$$\mathbf{X} = \Phi(t)\mathbf{C} + \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{B}(t) dt$$

Example 4.7. 求解 ODE:

$$y'' + y = f(t)$$

Solution.

$$Y = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

设 $y = u_1(t) \cos t + u_2(t) \sin t$, 其中 u_1', u_2' 满足:

$$\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

解得:

$$u_1' = -f(t) \sin t, u_2' = f(t) \cos t$$

即:

$$u_1(t) = c_1 - \int f(t) \sin t dt \quad u_2(t) = c_2 + \int f(t) \cos t dt$$

因此为:

$$\begin{aligned} y &= c_1 \cos t + c_2 \sin t + \int f(s) [\sin t \cos s - \cos t \sin s] ds \\ &= c_1 \cos t + c_2 \sin t + \int f(s) \sin(t-s) ds \end{aligned}$$

□

我们将这个结论推广到 n 阶情形:

Theorem 4.9. 求解 $L_n[y] = f(t)$. 设对应齐次方程的基本解组为 $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, 则非齐次方程的一组特解为: $y_* = u_1(t)y_1 + u_2(t)y_2 + \dots + u_n(t)y_n$ 其中 $u_i(t)$ 满足:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{bmatrix}$$

4.3 变系数 LODE

前面所学的都是常系数 LODE, 我们接下来研究变系数 LODE 及一些解法.

4.3.1 Euler 方程

Euler 方程是一种特殊的变系数 LODE.

Definition 4.1. 我们称以下形式的方程为 Euler 方程:

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x)$$

其中, a_i 为常数, $a_n \neq 0, x > 0$.

我们首先看到这个式子:

$$x \frac{dy}{dx} = f(x)$$

我们可以通过变量代换 $x = e^t$, 得到:

$$\frac{dy}{dt} = f(e^t)$$

这让我们想到, Euler 方程是否也可以进行同样的变量代换 $x = e^t$.

二阶情况下, Euler 方程为:

$$a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = f(x)$$

变量代换 $x = e^t$, 则:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \right) \\ &= -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dt^2} \end{aligned}$$

代入 Euler 方程, 得到:

$$\begin{aligned} a_2 x^2 \left(-\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dt^2} \right) + a_1 x \cdot \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} + a_0 y &= f(e^t) \\ \Rightarrow a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + (a_1 - a_2) \frac{dy}{dt} + a_0 y &= f(e^t) \end{aligned}$$

成功将一个变系数 LODE 转化为一个常系数 LODE. 那么同样, 在 n 阶情形下可以转化为:

$$b_n \frac{d^n y}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + b_1 \frac{dy}{dt} + b_0 y = f(e^t)$$

若为齐次方程 ($f = 0$), 则特征方程为:

$$b_n \lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + b_1 \lambda + b_0 = 0$$

解得 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$, 分别为 n_1, n_2, \cdots, n_s 重根, 则通解为:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{n_i-1} c_{ij} t^j e^{\lambda_i t} \\ &= \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{n_i-1} c_{ij} (\ln x)^j x^{\lambda_i} \end{aligned}$$

我们将 x^λ 代入 Euler 方程, 得到:

$$[a_n \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-n+1) + \cdots + a_0]$$

对其展开, 得到

$$b_n \frac{d^n y}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + b_1 \frac{dy}{dt} + b_0 y = f(e^t)$$

的对应系数.

Example 4.8. 求解 ODE:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = 6 \ln x - \frac{1}{x}$$

Solution. 令 $x = e^t$, 则方程变为:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 6t - e^{-t}$$

齐次方程通解为:

$$\begin{aligned}y &= \int \int (6t - e^{-t}) dt dt \\&= t^3 - e^{-t} + c_1 t + c_2 \\&= (\ln x)^3 - \frac{1}{x} + c_1 \ln x + c_2\end{aligned}$$

□

Example 4.9. 求解 ODE:

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} - 3x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 6x \frac{dy}{dx} - 6y = x^2$$

Solution. 把 $y = x^\lambda$ 代入左边.

$$\begin{aligned}LHS &= x^\lambda [\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 3\lambda(\lambda-1) + 6\lambda - 6] \\&= x^\lambda (\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6) \\&= x^\lambda (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)\end{aligned}$$

令 $x = e^t$, 因此方程变为:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} - 6 \frac{d^2 y}{dt^2} + 11 \frac{dy}{dt} - 6y = e^{2t}$$

且特征方程的解为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, 因此齐次 LODE 通解为:

$$Y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}$$

设特解为 $y_* = Ate^{2t}$, 代入 LODE 解得 $A = -1$. 因此通解为:

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} - te^{2t} = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 - x^2 \ln x$$

□

4.3.2 降阶法

对于高阶变系数 LODE, 我们可以通过已知的解来降低阶数, 从而进行求解.

对于二阶齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, 我们已知一个非零解 $y_1(x)$, 则可以设 $y = u(x)y_1(x)$, 代入方程, 得到:

$$\begin{aligned}y_1'' u + 2y_1' u' + y_1 u'' \\+ p y_1' u + p y_1 u' \\+ q y_1 u = 0\end{aligned}$$

从而有:

$$y_1 u'' + (2y_1' + p y_1) u' = 0$$

设 $z = u'$, 则:

$$y_1 z' + (2y_1' + p y_1) z = 0$$

化为一阶方程，实现了降阶。解得：

$$z = c_1 \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} = u'$$
$$u = c_2 + c_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} dx$$
$$y = c_2 y_1 + c_1 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} dx$$

同理，降阶法对于非齐次方程也成立。

Example 4.10. 已知 ODE:

$$xy''' + 3y'' - xy' - y = 0$$

有解 $y_1 = \frac{1}{x}$ ，求其通解。

Solution. 令 $y = \frac{u(x)}{x}$ ，则：

$$u''' - u' = 0$$

特征方程为： $\lambda^3 - \lambda = 0$ ，解得 $\lambda = 0, \pm 1$ ，因此 $u = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$ ，所以通解为：

$$y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2 e^x}{x} + \frac{c_3 e^{-x}}{x}$$

□

有时候可能题目并没有给出解，但是这个解比较容易猜测出来。

Example 4.11. 求解 ODE:

$$x^2 y'' - x(2-x)y' + (2-x)y = x^4$$

Solution. 我们先找 $x^2 y'' - x(2-x)y' + (2-x)y = 0$ 的一个解。注意到 $y_1 = x$ 。令 $y = u(x)x$ ，则：

$$u'' + u' = x$$

解得：

$$u = c_2 + c_1 e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - x$$
$$y = c_2 x + c_1 x e^{-x} + \frac{1}{2}x^3 - x^2$$

□

4.3.3 特殊系数

有一些二阶变系数 LODE 有特殊的系数形式，可以直接进行求解。

对于二阶齐次方程：

$$y'' + py' + qy = 0$$

令 $y = u(x)v(x)$, 则:

$$\begin{aligned} u''v + 2u'v + uv'' &= 0 \\ + pu'v + puv' & \\ + quv & \end{aligned}$$

我们希望 $2u'v + puv' = 0$, 因此得到:

$$2u' + pu = 0$$

解得:

$$u = e^{-\frac{1}{2} \int p(x) dx}$$

代入方程 $(u'' + pu' + qu)v + uv'' = 0$, 得到:

$$\begin{aligned} v'' + \frac{u'' + pu' + qu}{u}v &= 0 \\ v'' + \left(-\frac{p'}{2} - \frac{p^2}{4} + q\right)v &= 0 \end{aligned}$$

我们希望 $-\frac{p'}{2} - \frac{p^2}{4} + q$ 为常数 a , 则 $v'' + av = 0$ 可以快速解除 v .

Example 4.12. 求解 ODE:

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$$

Solution. 注意到 $-\frac{p'}{2} - \frac{p^2}{4} + q = -\left(-\frac{1}{x^2}\right)/2 - \frac{(2/x)^2}{4} + 1 = 1$ 为常数. 令 $y = u(x)v(x)$, 则:

$$\begin{aligned} u &= e^{-\frac{1}{2} \int \frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x} \\ v'' + v &= 0 \end{aligned}$$

解得 $v = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, 因此通解为:

$$y = \frac{c_1 \cos x + c_2 \sin x}{x}$$

□

4.3.4 常数变易法

常数变易法同样适用于变系数 LODE 的非齐次方程.

Example 4.13. 求解 ODE:

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = f(x)$$

Solution. 令 $y = \frac{\sin x}{x}u_1 + \frac{\cos x}{x}u_2$, 其中

$$\begin{bmatrix} \frac{\sin x}{x} & \frac{\cos x}{x} \\ \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} & -\frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$

□

4.3.5 (广义) 幂级数法

Definition 4.2. 若函数 $p(x)$ 能写成:

$$p = \sum a_i(x - x_0)^i \quad |x - x_0| < \alpha$$

则称 $p(x)$ 可实解析.

Theorem 4.10 (Cauchy 定理). 若 $p(x), q(x)$ 可实解析, 则方程:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

有形如 $\sum c_i(x - x_0)^i$ 的两个线性无关解, 其中 c_i 由待定系数法确定.

Example 4.14. 求解 ODE:

$$y'' = xy$$

Solution. 设 $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, 则:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n = 2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

因此:

$$c_2 = 0 \quad c_{n+2}(n+2)(n+1) = c_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

由数学归纳法可得:

$$c_{3k} = \frac{(3k-2)!!!}{(3k)!} c_0 \quad c_{3k+1} = \frac{(3k-1)!!!}{(3k+1)!} c_1 \quad c_{3k+2} = 0$$

因此通解为:

$$y = c_0 \sum \frac{(3k-2)!!!}{(3k)!} x^{3k} + c_1 \sum \frac{(3k-1)!!!}{(3k+1)!} x^{3k+1}$$

□

Theorem 4.11 (广义幂级数法). 若 $xp(x), x^2q(x)$ 在 x_0 附近可实解析, 则方程:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

有形如 $y = x^r \sum c_n x^n$ 的两个线性无关解 ($c_0 \neq 0$).

Example 4.15. 求解 ODE:

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$$

Solution. 即求:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$$

令 $y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($a_0 \neq 0$), 则:

$$a_0 r^2 x^{r-2} + a_1 (r+1)^2 x^{r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} (a_{m+2} (m+r+2)^2 + a_m) x^{m+r} = 0$$

$$\implies r = 0, a_1 = 0, a_{m+2} = -\frac{a_m}{(m+2)^2}$$

$$\implies a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{(2^k k!)^2}$$

因此其中一个解为:

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_0 \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2}$$

然后我们就可以用降阶法求出通解了. □

4.4 二阶 LODE 的零点分布

Problem 4.3 (Bessel 方程).

$$t^2 y'' + t y' + (t^2 - n^2) y = 0$$

其中 n 为非负整数.

方程两边同时除以 t^2 , 得到:

$$y'' + \frac{1}{t} y' + \left(1 - \frac{n^2}{t^2}\right) y = 0$$

能够得到:

$$y = e^{-\frac{1}{2} \int p dt} u = t^{\frac{1}{2}} u$$

其中 u 满足:

$$u'' + \left(1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{t^2}\right) u = 0$$

解的图像大概为:

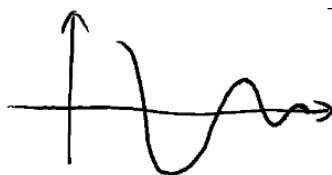


图 1: Bessel 方程解的图像

我们将研究解的零点分布情况, 即个数、间距等.

考虑 $y'' + q(t)y = 0$ (上面 Bessel 方程的例子表明 y' 可被吸收), $t \in [a, b]$, $q \in C([a, b])$.

Theorem 4.12 (孤立性). 非零解在区间 $[a, b]$ 上至多有有限个零点.

Solution. 反证法: 假设有无穷多个零点 t_1, t_2, \dots , 则有聚点定理, 必有聚点 t_0 .

$$t \rightarrow t_0, y(t) = 0$$

$$y'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} = 0$$

因此有 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} y'' + q(t)y = 0 \\ y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases}$$

有唯一零解, 与非零解矛盾. □

Theorem 4.13 (Sturm 比较定理). 设 $P(t) \geq Q(t)$, $t \in [a, b] \subset I$, $P, Q \in C(I)$, 方程 $x'' + Q(t)x = 0$ 有解 $x(t)$, $t \in I$, 且 a, b 是 $x(t)$ 的相邻零点. 那么对于方程 $y'' + P(t)y = 0$ 的解 $y(t)$, $t \in I$, 存在 $c \in [a, b]$, 使得 $y(c) = 0$.

Solution. 反证法: 假设 $\forall t \in [a, b]$, $y(t) \neq 0$, 不妨 $y(t) > 0$. 则:

$$\begin{aligned} (x'' + P(t)x)y - (y'' + Q(t)y)x &= 0 \\ \implies x''y - xy'' &= (P - Q)xy \\ &= (x'y - xy')' \end{aligned}$$

在 $[a, b]$ 上积分, 得到:

$$(x'y - xy')|_a^b = \int_a^b (P - Q)xy dt$$

由条件, $x(a) = x(b) = 0$ 是相邻零点, 因此 $x(t) \neq 0$. 不妨 $x(t) > 0$, 则:

$$x'(b)y(b) - x'(a)y(a) = \int_a^b (P - Q)xy dt \geq 0$$

左式为负值, 右式为正负值, 矛盾! □

Corollary 4.14. $x'' + qx = 0$ 有两个线性无关解 x_1, x_2 , 设 a, b 是 x_1 的相邻零点, 则 $\exists c \in (a, b)$, $x_2(c) = 0$.

Solution. 由 Sturm 比较定理, $\exists c \in [a, b]$, $x_2(c) = 0$. 如果取到了端点 a 或 b , 那么在 $t = c$ 处,

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = 0, \text{ 与 } x_1, x_2 \text{ 线性无关矛盾! 因此 } c \in (a, b). \quad \square$$

事实上, 我们也可以说:

- x_1, x_2 线性无关 \iff 零点不同 $\iff W \neq 0$
- x_1, x_2 线性相关 \iff 零点相同 $\iff W = 0$

那么, 对于零点的间距, 能否给出估计?

考虑 $y'' + q(x)y = 0$, $0 < m \leq q(x) \leq M$. 已知:

$$\begin{aligned} y'' + my = 0 & \quad y = A \cos(\sqrt{m}x + \varphi_0) \\ y'' + My = 0 & \quad y = B \cos(\sqrt{M}x + \varphi_0) \end{aligned}$$

零点间距分别为 $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$, $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$. 因此:

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq \text{原式零点间距} \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$$

Solution. 先证明: $0 < m \leq q(x)$ 时, 原间距 $\leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$.

反证法: 设 a, b 是相邻零点, 且 $b - a > \frac{\pi}{\sqrt{m}}$. 对于 $Y'' + mY = 0$, 有解

$$Y = A \sin [\sqrt{m}(x - a)]$$

有相邻零点 $a, a + \frac{\pi}{\sqrt{m}}$. 由 Sturm 比较定理, $\exists c \in [a, a + \frac{\pi}{\sqrt{m}}], y(c) = 0$. 但是当 $c = a$ 时无法导出矛盾!

修正: $\exists \varepsilon > 0, b > a + \varepsilon + \frac{\pi}{\sqrt{m}}$,

$$Y = \sin [\sqrt{m}(x - a - \varepsilon)]$$

有相邻零点 $a + \varepsilon, a + \varepsilon + \frac{\pi}{\sqrt{m}}$. 由 Sturm 比较定理, $\exists c \in [a + \varepsilon, a + \varepsilon + \frac{\pi}{\sqrt{m}}], y(c) = 0$, 因此 $c \in (a, b)$, 与 a, b 是相邻零点矛盾! 所以原间距 $\leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$.

同理可证: $q(x) \leq M$ 时, 原间距 $\geq \frac{\pi}{\sqrt{M}}$. 综上所述, $\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq$ 原式零点间距 $\leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$ □

Corollary 4.15. 当 $q(x) \leq 0$ 时, 非零解 $y(x)$ 最多有一个零点.

Solution. 反证法: 假设有两个零点 $x_1 \neq x_2$, 取 $M = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{|x_1 - x_2|} \right)^2$. 对于 $y'' + My = 0$, 与原式比较, 有

$$|x_1 - x_2| \geq \frac{\pi}{\sqrt{M}} = 2|x_1 - x_2|$$

矛盾! □

Problem 4.4 (n 阶 Bessel 方程零点分布).

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

Solution. 吸收 y' 项, 得到:

$$y'' + \left(1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2} \right) y = 0$$

- $0 \leq n < \frac{1}{2}$, 间距 $\leq \pi$
- $n = \frac{1}{2}$, 间距 $= \pi$
- $n > \frac{1}{2}$, 间距 $> \pi$

□

4.5 二阶 LODE 的边值问题

对于 $y'' + y = 0$, 我们能推出通解:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

若给出初值条件 $y(0) = 0, y(\pi) = 1$, 则推出无解!

我们要考虑的是

$$\begin{cases} y'' + py' + qy = 0 \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{cases} \quad (*)$$

在 a, b 满足什么条件的时候有唯一解?

Definition 4.3. 若齐次边值问题

$$\begin{cases} y'' + py' + qy = 0 \\ y(a) = 0, y(b) = 0 \end{cases}$$

存在非零解, 则称 a, b 为**共轭点**.

Theorem 4.16. a, b 是方程

$$y'' + py' + qy = 0$$

的共轭点的充分必要条件是: 该方程的任意两个线性无关解 y_1, y_2 满足:

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix} = 0$$

Solution. 该方程的任意两个线性无关解 y_1, y_2 满足:

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix} = 0$$

等价于:

$$\begin{bmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

有非零解 c_1, c_2 , 因此有非零解 $y = c_1y_1 + c_2y_2$ 满足:

$$y(a) = 0, y(b) = 0$$

等价于 a, b 为共轭点. □

Theorem 4.17. 边值问题

$$\begin{cases} y'' + py' + qy = 0 \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{cases}$$

存在唯一解的充分必要条件为 a, b 不是共轭点.

Solution. 设通解为 $y = c_1y_1 + c_2y_2$, 其中 y_1, y_2 , 边值条件等价于:

$$c_1y_1(a) + c_2y_2(a) = \alpha, \quad c_1y_1(b) + c_2y_2(b) = \beta$$

因此这个方程组对于 c_1, c_2 有唯一解的充分必要条件为:

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix} = y_1(a)y_2(b) - y_2(a)y_1(b) \neq 0$$

也就等价于 a, b 不是共轭点. □

那我们如何求通解呢?

Example 4.16. 求解边值问题:

$$\begin{cases} y'' + py' + qy = 0 \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{cases}$$

其中 a, b 不是共轭点.

Solution. 我们只需找到两个线性无关解 y_1, y_2 . 我们令:

$$\begin{cases} y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \\ y_1(a) = 1, y_1(b) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y_2'' + py_2' + qy_2 = 0 \\ y_2(a) = 0, y_2(b) = 1 \end{cases}$$

因为 y_1, y_2 零点不同, 所以符合线性无关, 因此通解为:

$$y = \alpha y_1 + \beta y_2$$

□

那么, 自然而然的, 我们要考虑非齐次的情况.

Example 4.17. 求解边值问题:

$$\begin{cases} y'' + py' + qy = f(x) \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{cases}$$

其中 a, b 不是共轭点.

Solution. 由上面的例子, 我们先求出对应齐次方程的两个线性无关解 y_1, y_2 . 设通解为:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_3$$

其中 y_3 满足:

$$\begin{cases} y_3'' + py_3' + qy_3 = f(x) \\ y_3(a) = y_3(b) = 0 \end{cases}$$

由于 $f(x)$ 的一般性, 我们只能够使用常数变易法来求解 y_3 . 设:

$$y_3 = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2$$

其中:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$

解得:

$$y_3 = y_1 \int_a^x \frac{-f y_2(t)}{W(t)} dt - y_2 \int_x^b \frac{f y_1(t)}{W(t)} dt$$

□

5 一阶常微分方程的适定性

这一章我们研究的是一般的一阶常微分方程:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

解的情况. 我们关心的是解的存在性、唯一性、连续依赖性, 合在一起就称为这个 Cauchy 问题的适定性问题.

5.1 存在性

在前面的章节中, 我们把解写出来了, 自然解决了存在性的问题. 但是对于一般的方程, 我们无法把解写出来.

Definition 5.1 (方向场). $\Omega \subset \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \Omega$, 做斜率为 $f(x, y)$ 的短线段, 形成 Ω 上的方向场. 我们把区域 Ω 和 Ω 上的方向场合在一起, 称为 **ODE 的方向场**.

Definition 5.2. 若 Ω 上的一条曲线 Γ 满足: $\forall (x, y) \in \Gamma$, 曲线在该点与方向场相切, 则称 Γ 为积分曲线.

那么我们所研究的存在性, 也就是想要找到解, 也就等价于找过 (x_0, y_0) 的积分曲线.

Theorem 5.1 (Peano 定理). 记矩形区域 $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, 若 $f \in C(R)$, 则 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

在 $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ 内存在解. 其中:

$$\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad M = \max_{(x, y) \in R} |f(x, y)|$$

为什么是这样的 α 呢? 考虑 $f = 0$ 时, 显然可以取到 $\alpha = a$. 而当 $f(x_0, y_0)$ 是一个很大的常数 M 时, 积分曲线 Γ 与直线 $y = M(x - x_0) + y_0$ 相切, 而所有的情况需要限制在 R 内, 因此考虑直线与矩形区域 R 上边的交点, 得到 $\alpha = \frac{b}{M}$, 因此有 $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$. 其中的 M 由 f 决定, 即 $M = \max_{(x, y) \in R} |f(x, y)|$

那么我们怎么去证明 Peano 定理呢? 首先想到的就是利用方向场来构造积分曲线. 下面考虑的是右行解. 我们将 $[x_0, x_0 + \alpha]$ 分成 n 份, 每一份长度为 $h = \frac{\alpha}{n}$, 记 $x_k = x_0 + kh$ ($k = 0, 1, \dots, n$).

$$y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i)$$

定义分段函数: 当 $x \in [x_k, x_{k+1}]$ 时,

$$\varphi_n(x) = y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i) + f(x_k, y_k)(x - x_k)$$

我们将这些线段连接起来, 得到逼近解, 我们称 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 为 **Eular 折线**, 这些折线只满足在 $[x_0, x_0 + \alpha]$ 上连续, 也就是说: 在收敛过程中, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 我们希望 $\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ 是方程的解, 但是 $\varphi(x)$ 目前只满足连续, 不能保证其满足一阶导数连续.

我们换个角度, 把 Cauchy 问题改写成积分方程 (等价性显然):

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \quad x \in [x_0, x_0 + \alpha] = I$$

由积分方程解的定义, y 只需要在 I 上连续, 并且满足积分方程即可. 那么我们希望上面所得到的 $\varphi(x)$ 满足这个积分方程.

对于 $\varphi_n(x)$ 的收敛情况, 在数分中我们有:

Theorem (有界数列必有收敛子列). 设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 存在常数 $N > 0$, 使得

$$|a_n| \leq N, \quad \forall n$$

则 $\exists \{a_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}, a_{n_j} \rightarrow a (j \rightarrow \infty)$

同样的, 我们希望 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在满足一定条件下也有收敛子列, 就能得到 $\varphi(x)$. 这里要引入 **Arzela-Ascoli 定理**:

Definition 5.3 (一致有界). 若 \exists 常数 N , 使得

$$|\varphi_n(x)| \leq N, \quad \forall x \in I, n = 1, 2, \dots$$

则称 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上**一致有界**.

Definition 5.4 (等度连续). 若 $\varphi_n(x) \in C(I), \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得

$$\forall x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| < \delta \implies |\varphi_n(x_1) - \varphi_n(x_2)| < \varepsilon, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

则称 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上**等度连续**.

Theorem 5.2 (Arzela-Ascoli 定理). 设 $I \in [a, b]$ 是一个有界闭区域, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 I 上满足: 一致有界、等度连续, 则存在一致收敛子列 $\{\tilde{\varphi}_n(x)\}_{j=1}^{\infty}$

$$\tilde{\varphi}_n(x) \rightrightarrows \varphi(x) \quad \forall x \in I, n \rightarrow +\infty$$

并且 $\varphi(x) \in C(I)$.

Solution. 我们取 $A = \{I \text{ 中的有理点}\}$, 则 A 是可数集, 记 $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m, \dots\}$.

对于函数列 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x = x_1$ 处的值构成数列 $\{\varphi_n(x_1)\}_{n=1}^{\infty}$, 因为有界数列必有收敛子列, 存在收敛子列

$$\{\varphi_n^{(1)}(x_1)\}_{n=1}^{\infty} \quad \varphi_n^{(1)}(x_1) \rightarrow y_1 (n \rightarrow \infty)$$

对于函数列 $\{\varphi_n^{(1)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x = x_2$ 处的值构成数列 $\{\varphi_n^{(1)}(x_2)\}_{n=1}^{\infty}$, 存在收敛子列

$$\{\varphi_n^{(2)}(x_2)\}_{n=1}^{\infty} \quad \varphi_n^{(2)}(x_2) \rightarrow y_2 (n \rightarrow \infty)$$

以此类推, 得到:

$$\{\varphi_n^{(m)}(x_m)\}_{n=1}^\infty \quad \varphi_n^{(m)}(x_m) \rightarrow y_m \quad (n \rightarrow \infty)$$

并且有包含关系:

$$\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty \supset \{\varphi_n^{(1)}(x)\}_{n=1}^\infty \supset \{\varphi_n^{(2)}(x)\}_{n=1}^\infty \supset \cdots \supset \{\varphi_n^{(m)}(x)\}_{n=1}^\infty \supset \cdots$$

同时写成表格形式:

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi_1^{(1)}(x_1) & \varphi_2^{(1)}(x_1) & \varphi_3^{(1)}(x_1) & \cdots & \rightarrow & y_1 & \\ \varphi_1^{(2)}(x_2) & \varphi_2^{(2)}(x_2) & \varphi_3^{(2)}(x_2) & \cdots & \rightarrow & y_2 & \\ \varphi_1^{(3)}(x_3) & \varphi_2^{(3)}(x_3) & \varphi_3^{(3)}(x_3) & \cdots & \rightarrow & y_3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \end{array}$$

由包含关系, 每一行都是上一行的子列, 我们取对角线上的元素, 得到子列:

$$\tilde{\varphi}_n(x) = \varphi_n^{(n)}(x)$$

下面我们的目标是证明: $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, m > N,$

$$|\tilde{\varphi}_n(x) - \tilde{\varphi}_m(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in I$$

根据有理数的稠密性, 我们可以找到 $\bar{x}_i \in A$, 使得 $x \sim \bar{x}_i$. 由三角不等式, 有:

$$\begin{aligned} |\tilde{\varphi}_n(x) - \tilde{\varphi}_m(x)| &\leq |\tilde{\varphi}_n(x) - \tilde{\varphi}_n(\bar{x}_i)| \\ &\quad + |\tilde{\varphi}_n(\bar{x}_i) - \tilde{\varphi}_m(\bar{x}_i)| \\ &\quad + |\tilde{\varphi}_m(\bar{x}_i) - \tilde{\varphi}_m(x)| \end{aligned}$$

由于 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 在 I 上等度连续, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得

$$\forall |x_1 - x_2| < \delta, |\varphi_n(x_1) - \varphi_n(x_2)| < \varepsilon \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

由于 I 有界闭, 则 $I \subset \bigcup_{x_i \in A} (x_i - \frac{\delta}{2}, x_i + \frac{\delta}{2})$, 由有限覆盖定理, 存在有限个 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_L \in A$, 使得:

$$I = \bigcup_{i=1}^L (\bar{x}_i - \frac{\delta}{2}, \bar{x}_i + \frac{\delta}{2})$$

记 $B = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_L\}$, 那么 $\forall x \in I, \exists \hat{x} \in B, |x - \hat{x}| < \frac{\delta}{2}$. 因此:

$$|\varphi_n(x) - \varphi_n(\hat{x})| < \varepsilon$$

因为:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}_n(\bar{x}_i) = \bar{y}_i$$

所以 $\exists N_i$, 使得当 $n, m > N_i$ 时, 有:

$$|\tilde{\varphi}_n(\bar{x}_i) - \tilde{\varphi}_m(\bar{x}_i)| < \varepsilon$$

取 $N = \max\{N_1, \dots, N_L\}$, 则当 $n, m > N$ 时, 有:

$$|\tilde{\varphi}_n(\bar{x}_i) - \tilde{\varphi}_m(\bar{x}_i)| < \varepsilon \quad \forall i = 1, 2, \dots, L$$

综上所述, 当 $n, m > N$ 时, 有:

$$\begin{aligned} |\tilde{\varphi}_n(x) - \tilde{\varphi}_m(x)| &\leq |\tilde{\varphi}_n(x) - \tilde{\varphi}_n(\hat{x})| \\ &\quad + |\tilde{\varphi}_n(\hat{x}) - \tilde{\varphi}_m(\hat{x})| \\ &\quad + |\tilde{\varphi}_m(\hat{x}) - \tilde{\varphi}_m(x)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \end{aligned}$$

所以, $\{\tilde{\varphi}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上一致收敛于 $\varphi(x)$,

$$\tilde{\varphi}_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$$

并且 $\varphi(x) \in C(I)$. □

那么 Peano 定理的证明就可以分为以下几步:

- 将微分方程改写为积分方程 $y = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds$
- 构造 Euler 折线 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.
- 证明 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上一致有界、等度连续. 由 Arzela-Ascoli 定理, 其一致收敛于 $\varphi(x)$.
- 证明 $\varphi(x)$ 满足积分方程.

Theorem (Peano 定理). 记矩形区域 $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, 若 $f \in C(R)$, 则 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

在 $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ 内存在解. 其中:

$$\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad M = \max_{(x,y) \in R} |f(x, y)|$$

Solution (Peano 定理的证明). 记 $I = [x_0, x_0 + \alpha]$ 微分方程等价于积分方程:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \quad x \in I$$

构造 Euler 折线:

$$\varphi_n(x) = y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i) + f(x_k, y_k)(x - x_k), \quad x \in [x_k, x_{k+1}]$$

其中 $y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})(x_k - x_{k-1})$.

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x) - y_0| &\leq \sum_{i=0}^{k-1} |f| \frac{\alpha}{n} + |f| \frac{\alpha}{n} \leq (k+1) \frac{\alpha}{n} \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \\ &\leq \alpha \end{aligned}$$

$$|\varphi_n(x)| \leq |y_0| + \alpha$$

因此 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上一致有界.

对于任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$, 则当 $|x'_1 - x'_2| < \delta$ 时, 有:

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x'_1) - \varphi_n(x'_2)| &\leq |\varphi_n(x'_1) - \varphi_n(x_i)| + \cdots + |\varphi_n(x_j) - \varphi_n(x'_2)| \quad (\text{有限项}) \\ &\leq M|x'_1 - x_i| + \cdots + M|x_j - x'_2| \\ &\leq M|x'_1 - x'_2| < M\delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

因此 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 在 I 上等度连续.

由 Arzela-Ascoli 定理, \exists 一致收敛子列

$$\tilde{\varphi}_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$$

记

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi_n(s)) ds + \delta_n(x)$$

我们的目标是证明 $\delta_n(x) \rightrightarrows 0 (n \rightarrow \infty)$. 由构造可知:

$$\delta_n(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x_i, y_i) - f(s, \varphi_n(s))] ds + \int_{x_k}^x [f(x_k, y_k) - f(s, \varphi_n(s))] ds$$

因为 $f \in C(R)$, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $\forall |x_1 - x_2| < \delta, |y_1 - y_2| < \delta$, 有

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$$

我们需要 $h = \frac{\alpha}{n} < \delta$ 和 $|\varphi_n(s) - y_i| \leq Mh = M\frac{\alpha}{n} < \delta$.

因此取 $N = \frac{(2+M)\alpha}{\delta}$, 当 $n > N$ 时, 满足 $h = \frac{\alpha}{n} < \delta$ 和 $|\varphi_n(s) - y_i| \leq Mh = M\frac{\alpha}{n} < \delta$. 因此

$$|\delta_n(x)| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon(x_{i+1} - x_i) + \varepsilon(x - x_k) \leq \varepsilon\alpha$$

因此 $\delta_n(x) \rightrightarrows 0 (n \rightarrow \infty)$.

综上所述, $\varphi(x)$ 满足积分方程, 因此 $\varphi(x)$ 是 Cauchy 问题的解, 即解存在. □

Peano 定理保证了解的存在性, 我们希望更对 f 进行进一步的限制, 从而保证解的唯一性.

5.2 唯一性

5.2.1 Lip 条件

Definition 5.5 (Lipschitz 条件 (简称 Lip 条件)). 设区域 $R \subset \mathbb{R}^2$, 若对于 R 中的每一个紧集 $K, \exists L_K > 0$, 使得

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L_K |y_1 - y_2|, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in R$$

则称 $f(x, y)$ 在 R 上满足 (局部) Lipschitz 条件.

进一步的: 若 $\exists L > 0$, 使得

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in R$$

则称 $f(x, y)$ 在 R 上满足一致 Lipschitz 条件.

Lemma 5.3 (Gronwall 不等式). 设 $u(x), \alpha(x)$ 在区间 I 上连续, 有 $u, \alpha \geq 0; c, k \geq 0$, 若

$$u(x) \leq c + \int_{x_0}^x [\alpha(s)u(s) + k] ds$$

则

$$u(x) \leq [c + k(x - x_0)]e^{\int_{x_0}^x \alpha(s) ds}$$

Solution. 记 $Y(x) = c + \int_{x_0}^x [\alpha(s)u(s) + k] ds$, 则 $Y(x)$ 可导, 且

$$Y'(x) = \alpha(x)u(x) + k \leq \alpha(x)Y(x) + k$$

因此:

$$\begin{aligned} \left(e^{-\int_{x_0}^x \alpha(s) ds} Y(x) \right)' &\leq k e^{-\int_{x_0}^x \alpha(s) ds} \\ e^{-\int_{x_0}^x \alpha(s) ds} Y(x) - Y(x_0) &\leq k(x - x_0) \\ u(x) \leq Y(x) &\leq [c + k(x - x_0)]e^{\int_{x_0}^x \alpha(s) ds} \end{aligned}$$

特别的: $c, k = 0$ 时, $u = 0$. □

Theorem 5.4 (Picard 定理). 记矩形区域 $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, 若 $f \in C(R)$ 并且在 R 上满足 Lip 条件, 则 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

在 $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ 内存在唯一解. 其中:

$$\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad M = \max_{(x,y) \in R} |f(x, y)|$$

Solution. 我们只证明右行解.

存在性: 转化为积分方程:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds$$

构造 Picard 迭代序列作为逼近解:

$$\begin{aligned} y_0 &= y_0 \\ y_{k+1} &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_k(s)) ds \end{aligned}$$

由数学归纳法可知 $\{y_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 是良定义的, 即:

$$\begin{cases} y_k(x) \in C(I) \\ |y_k(x) - y_0| \leq b \end{cases}$$

我们断言:

$$|y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq \frac{M}{L} \frac{[L(x - x_0)]^k}{k!}$$

由数学归纳法：当 $k = 1$ 时，

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(s, y_0) ds \right| \leq M(x - x_0) = \frac{M}{L} \frac{[L(x - x_0)]^1}{1!}$$

假设 k 成立，则对于 $k + 1$ ，有：

$$\begin{aligned} |y_{k+1} - y_k| &= \left| \int_{x_0}^x [f(s, y_k(s)) - f(s, y_{k-1}(s))] ds \right| \\ (\text{Lip}) &\leq \int_{x_0}^x L|y_k - y_{k-1}|(s) ds \\ &\leq \int_{x_0}^x L \frac{M}{L} \frac{[L(s - x_0)]^k}{k!} ds \\ &= \frac{M}{L} \frac{[L(x - x_0)]^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

因此断言成立.

将不等式进一步放大：

$$|y_k - y_{k-1}|(x) \leq \frac{M}{L} \frac{[L\alpha]^k}{k!}$$

因为级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{[L\alpha]^k}{k!} = e^{L\alpha} - 1$ 收敛，所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{[L\alpha]^n}{n!} < \varepsilon$$

因此当 $n, m > N$ 时，有：

$$\begin{aligned} |y_n - y_m|(x) &\leq \sum_{k=n}^m |y_k - y_{k-1}|(x) \\ &\leq \frac{M}{L} \sum_{k=n}^m \frac{[L\alpha]^k}{k!} \\ &< \frac{M}{L} \varepsilon \end{aligned}$$

因此 $y_k(x) \Rightarrow y(x) (k \rightarrow \infty) \forall x \in I$.

对于逼近解取 $k \rightarrow \infty$ ，得到：

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds$$

正好是积分方程，因此 $y_k(x)$ 的极限 $y(x)$ 就是原 Cauchy 问题的解.

唯一性： 假设 $y = y_1(x), y = y_2(x)$ 是 Cauchy 问题的两个不同的解，则

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_1(s)) ds \\ y_2 &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_2(s)) ds \end{aligned}$$

两式相减取绝对值，得到：

$$\begin{aligned} |y_1 - y_2|(x) &= \left| \int_{x_0}^x [f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))] ds \right| \\ (\text{Lip}) &\leq \int_{x_0}^x L|y_1 - y_2|(s) ds \end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式可知， $|y_1 - y_2|(x) = 0$ ，即 $y_1 = y_2$ ，与假设矛盾. □

5.2.2 Osgood 条件

Definition 5.6 (Osgood 条件). 设区域 $R \subset \mathbb{R}^2$, 若存在 $[0, +\infty)$ 上的连续函数 $F(r) > 0$, 使得

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq F(|y_1 - y_2|), \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in R$$

并且

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{F(r)} = +\infty, \quad \forall r_1 > 0$$

则称 $f(x, y)$ 在 R 上满足 **Osgood 条件**.

Theorem 5.5. 记矩形区域 $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, 若 $f \in C(R)$ 并且在 R 上满足 Osgood 条件, 则 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

在 $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ 内存在唯一解. 其中:

$$\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad M = \max_{(x, y) \in R} |f(x, y)|$$

Solution. 存在性与 Picard 定理相同. 下面证明唯一性.

反证法: 假设 $y = y_1(x), y = y_2(x)$ 是 Cauchy 问题的两个不同的解, 则 $\exists x_2 \in I, y_1(x_2) \neq y_2(x_2)$, 因此 $\exists x_1 \in [x_0, x_2], y_1(x_1) = y_2(x_1)$, 且 $\forall x \in (x_1, x_2], y_1(x) > y_2(x)$.

令 $r(x) = (y_1 - y_2)(x)$, 则 $r(x) > 0$, 且

$$r' = y_1' - y_2' = f(x, y_1) - f(x, y_2) \leq F(r)$$

取 $x_3 \in (x_1, x_2)$, 则 $\forall x \in [x_3, x_2]$,

$$\frac{r'}{F(r)} \leq 1$$

对上式在 $[x_3, x_2]$ 上积分, 得到:

$$\int_{x_3}^{x_2} \frac{r'}{F(r)} dx \leq x_2 - x_3$$

由变量替换, 有:

$$\int_{r(x_3)}^{r(x_2)} \frac{dr}{F(r)} \leq x_2 - x_3$$

令 $x_3 \rightarrow x_1^+$, 则:

$$\infty = \int_0^{r(x_2)} \frac{dr}{F(r)} \leq x_2 - x_1 < +\infty$$

矛盾, 因此解唯一. □

5.2.3 单调递减条件

Theorem 5.6. 记矩形区域 $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, 若 $f \in C(R)$ 并且在 R 上关于 y 单调递减, 则 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

在 $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ 内存在唯一解. 其中:

$$\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad M = \max_{(x,y) \in R} |f(x, y)|$$

Solution. 假设 $y = y_1(x), y = y_2(x)$ 是 *Cauchy* 问题的两个不同的解, 则 $\exists x_2 \in I, y_1(x_2) \neq y_2(x_2)$, 因此 $\exists x_1 \in [x_0, x_2]$, 使得 $y_1(x_1) = y_2(x_1)$, 且 $\forall x \in (x_1, x_2), y_1(x) > y_2(x)$. 但是:

$$\begin{aligned} y_1(x_2) &= y_1(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(s, y_1(s)) ds \\ &\leq y_1(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(s, y_2(s)) ds \\ &= y_2(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(s, y_2(s)) ds \\ &= y_2(x_2) \end{aligned}$$

矛盾, 因此解唯一. □

5.2.4 Cauchy 存在定理

Theorem 5.7 (*Cauchy* 存在定理). 设区域 $R \subset \mathbb{R}^2$, 若 $f \in C(R)$ 并且在 R 上可被实解析. 即

$$f(x, y) = \sum a_{ij} (x - x_0)^i (y - y_0)^j$$

在 R 上收敛, 则 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

在 $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ 存在唯一实解析解.

证明方法其实就是运用待定系数法, 将解表示为幂级数, 然后代入方程中求解系数.

Example 5.1. 求解方程:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y + x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Solution. 一阶 *LODE*

$$y = \frac{5}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

Peano 定理: $x \in [0, 1]$ 内分成 n 等份, $h = \frac{1}{n}$, $x_k = \frac{k}{n}$, 构造 Euler 折线:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + f(x_k, y_k) \cdot \frac{1}{n} \\ &= y_k + (2y_k + x_k) \cdot \frac{1}{n} \\ &= \left(1 + \frac{2}{n}\right) y_k + \frac{k}{n^2} \end{aligned}$$

因此:

$$y_{k+1} + \frac{k+1}{2n} + \frac{1}{4} = \left(1 + \frac{2}{n}\right) \left(y_k + \frac{k}{2n} + \frac{1}{4}\right)$$

所以:

$$\begin{aligned} y_k &= \left(1 + \frac{2}{n}\right)^k \left(y_0 + \frac{0}{2n} + \frac{1}{4}\right) - \frac{k}{2n} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{5}{4} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^k - \frac{k}{2n} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{5}{4} \left[\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^{2x_k} - \frac{x_k}{2} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

取 $k \rightarrow \infty$, 得到:

$$y(x) = \frac{5}{4} e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

Picard 定理: 构造 Picard 迭代序列:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \\ y_1 &= 1 + \int_0^x f(s, y_0) ds = 1 + \int_0^x (2 + s) ds = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 \\ &\dots \\ y_k(x) &= 1 + \frac{x^2}{2} + 2x + 2x^2 + \frac{5}{4} \left(\frac{(2x)^3}{3!} + \dots + \frac{(2x)^{k+1}}{(k+1)!} \right) - \frac{(2x)^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

取 $k \rightarrow \infty$, 得到:

$$y(x) = \frac{5}{4} e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

幂级数法 设解为幂级数形式:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

能够得到:

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 \\ c_1 &= 2 \quad c_2 = \frac{5}{2} \quad c_3 = \frac{5}{3} \\ c_k &= \frac{5}{4} \cdots \frac{2^k}{k!} \quad k \geq 4 \end{aligned}$$

因此:

$$y = \frac{5}{4} e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

□

5.3 解的延拓

对于 Cauchy 问题

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

其解为:

$$y = \frac{1}{1-x} \quad x \in (-\infty, 1)$$

前面的 Peano 定理和 Picard 定理只能保证在 $|x - x_0| \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$ 内存在唯一解, 但是实际上解空间是 $(-\infty, 1)$ 上, 相差很大.

因此我们会思考, 能否将解延拓到更大的区间上去?

5.3.1 存在性

Lemma 5.8. 设 $f \in C(G)$, $G \subset \mathbb{R}^2$ 是开集. 假设 $\phi(x)$ 是 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 $[x_0, b)$ 上的解, 记解曲线为

$$\Gamma = \{(x, \phi(x)) \mid x \in [x_0, b)\} \subset A \subset G$$

若 A 是紧集 (有界闭集), 则 $\phi(x)$ 可延拓至 $[x_0, b]$.

我们的目标是 1. 求出 $\phi(b)$ 的值; 2. $\phi(x)$ 在 $[x_0, b]$ 上是解, 即:

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \phi(s)) ds \quad x \in [x_0, b]$$

我们希望由 $\phi \in C(G)$ 再加上某些条件, 来证明 $\phi(x)$ 一致收敛, 这样就能证明 $\lim_{x \rightarrow b} \phi(x)$ 存在, 令其为 $\phi(b)$ 即可. 那也就是说, 我们的目标是证明 $|\phi'(x)|$ 有界 (中值定理).

Solution. 因为 A 是紧集, $f \in C(G)$, 所以 $f(A)$ 是紧的. 所以 $\exists M > 0$, 使得

$$|f(x, y)| \leq M \quad \forall (x, y) \in A$$

因此 $\forall x \in [x_0, b)$, 有:

$$|\phi'(x)| = |f(x, \phi(x))| \leq M$$

所以 $\phi(x)$ 在 $[x_0, b)$ 上一致连续. 因此 $\lim_{x \rightarrow b^-} \phi(x)$ 存在, 记为 $\phi(b)$.

由解的定义, 有:

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \phi(s)) ds \quad x \in [x_0, b)$$

令 $x \rightarrow b$, 得到:

$$\phi(b) = y_0 + \int_{x_0}^b f(s, \phi(s)) ds$$

因此解 $\phi(x)$ 可延拓至 $[x_0, b]$ □

Lemma 5.9. 设 $f \in C(G)$, $G \subset \mathbb{R}^2$ 是开集. 设 $\phi(x), \psi(x)$ 分别是 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在

$[x_0, b], [b, c]$ 上的两个解 (一定有 $\phi(b) = \psi(b)$). 则

$$y(x) = \begin{cases} \phi(x) & x \in [x_0, b] \\ \psi(x) & x \in [b, c] \end{cases}$$

是 ODE 在 $[x_0, c]$ 上的解.

Solution. 由条件, ODE 在 $[x_0, b) \cup (b, c]$ 上成立. 注意到 $y'(b) = \phi'(b^-) = \psi'(b^+)$ 与 $\phi'(b^-) = \phi'(b) = f(b, \phi(b)) = f(b, \psi(b)) = \psi'(b) = \psi'(b^+)$ 因此 $y'(b) = f(b, \phi(b)) = f(b, y(b))$. 所以 ODE 在 $[x_0, c]$ 上成立. \square

Theorem 5.10 (解延拓定理). 设 $f \in C(G)$, $G \subset \mathbb{R}^2$ 是开集. 对于 $\forall (x_0, y_0) \in G$, Cauchy 问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

有解曲线 Γ , 则解曲线 Γ 可延拓至 G 的边界 (∂G).

参考 W. Walter 的 ODE(GTM 182) 教材, 分两步证明: 1. 证明对于 G 中的任意紧集 A , 解曲线 Γ 可延拓至 A 外; 2. 反证法证明定理.

Solution. 对于 G 中的一个紧集 A , A 与 ∂G 有距离的, 记:

$$3a = \begin{cases} \text{dist}(A, \partial G) = \min\{\text{dist}((x, y), \partial G) \mid (x, y) \in A\}, & G \text{ 有界} \\ 3, & G \text{ 无界} \end{cases}$$

那么有 $\forall (x_0, y_0) \in A$, $R_{(x_0, y_0)} = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - a, y_0 + a] \subset G$. 在 $R_{(x_0, y_0)}$ 中用 Peano 定理, 令 $M = \max_{\text{dist}\{(x, y), A\} \leq a} |f(x, y)|$, $\alpha = \min\left\{a, \frac{a}{M}\right\}$, 则解在 $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ 上存在, 其中 α 是固定的.

若 $\Gamma = \{(x, \phi(x)) \mid x \in [\xi, b]\}$, 其中 ϕ 是解, 则由引理5.8可知, ϕ 可延拓至 $[\xi, b]$.

那么我们对 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(b) = \phi(b) \end{cases}$ 在 $R_{(b, \phi(b))}$ 上用 Peano 定理, 得到解:

$$y = \psi(x) \quad x \in [b, b + \alpha]$$

由引理5.9可知, 有解 $y(x)$, $x \in [\xi, b + \alpha]$.

同理, 经过有限步 (至多 $\frac{D}{\alpha} + 1$ 步, D 是 A 的直径), 解曲线 Γ 可延拓至 A 外.

构造 $A_m = \{x \in G, \text{dist}(x, \partial G) \geq \frac{1}{m}\}$, 则 $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset G$.

那么解曲线 Γ_0 要么能延拓至 ∂G , 要么未能延拓至 ∂G . 若未能延拓至 ∂G , 则存在 $i_1, \Gamma_0 \subset A_{i_1}$, 则 Γ_0 可延拓至 A_{i_1} 外, 记为 Γ_1 .

重复这个过程, 若 Γ_k 未能延拓至 ∂G , 则存在 $i_{k+1} > i_k$, 使得 $\Gamma_k \subset A_{i_{k+1}}$, 则 Γ_k 可延拓至 $A_{i_{k+1}}$ 外, 记为 Γ_{k+1} .

记 $\Gamma_k = \{(x, \phi_k(x)), x \in [\xi, b_k]\}$, 则 $b_k < b_{k+1}, \phi_k = \phi_{k+1}$. 令 $b = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k$. 则解 ϕ 在 $[x_0, b)$ 上存在.

$$\lim_{x \rightarrow b} (x, \phi(x)) \in \partial G$$

即可以延拓至 ∂G . \square

Corollary 5.11. 解的最大存在区间是开区间.

Definition 5.7. 若 $\phi(x)$ 是 $y' = f(x, y)$ 在 (a, b) 上的解, $\psi(x)$ 是 $y' = f(x, y)$ 在 J 上的解, 并且 $(a, b) \subset J$, $\phi(x)|_{(a,b)} = \psi(x)|_{(a,b)}$, 则称 $\phi(x)$ 是 **可延拓的**, $\psi(x)$ 是 $\phi(x)$ 在 J 上的一个 **延拓**.

反之, 若不存在这样的 $\psi(x)$, 则称 $\phi(x)$ 为**饱和解**.

因此解延拓定理说明了, $f \in C(G)$ 时, $y' = f(x, y)$ 存在饱和解.

5.3.2 唯一性

前面 Picard 定理已经说明了, 若 f 满足 Lip 条件, 则解有存在唯一性. 那么就有定理:

Theorem 5.12. 设 $f \in C(G)$, $G \subset \mathbb{R}^2$ 是开集, 并且 f 在 G 上满足 Lip 条件. 则 $\forall (x_0, y_0) \in G$, $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 存在唯一饱和解.

5.3.3 整体解

Definition 5.8. 考虑 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 $R = (a, b) \times (-\infty, +\infty)$ 上 (a, b 都可以取 $-\infty$ 或 $+\infty$), 若 f 在 (a, b) 上存在, 则称为 **整体解**.

我们知道, 当 $p(x), q(x) \in C((a, b))$ 时, 线性方程 $\begin{cases} y' = p(x)y + q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 的解就是整体解. 考虑一般一点的情况:

Theorem 5.13. 若 f 在 R 上关于 y 满足一致 Lip 条件, 即 $\exists L > 0$, 使得对任意 $(x, y_1), (x, y_2) \in R$ 有:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

则任意饱和解在 (a, b) 上存在.

Remark 5.1. 也就是说, 任意饱和解都是整体解.

Solution. 同样的我们考虑右行解. 假设 $\exists (x_0, y_0) \in R$, 其饱和解 $y = \varphi(x)$ 的最大存在区间为 $[x_0, \beta)$, 其中 $\beta < b$. 那么

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \beta^-} |\varphi(x)| = \infty$$

否则可以延拓到边界. 因此 $\varphi(x)$ 满足

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds \quad x \in [x_0, \beta)$$

$$\begin{aligned}
|\varphi(x) - y_0| &\leq \int_{x_0}^x |f(s, \varphi(s))| ds \\
&\leq \int_{x_0}^x |f(s, y_0)| ds + \int_{x_0}^x |f(s, \varphi(s)) - f(s, y_0)| ds \\
(\text{Lip}) &\leq \max_{s \in [x_0, b]} |f(s, y_0)|(\beta - x_0) + \int_{x_0}^x L|\varphi(s) - y_0| ds
\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式可知:

$$|\varphi(x) - y_0| \leq \max_{s \in [x_0, b]} |f(s, y_0)|(\beta - x_0)e^{L(\beta - x_0)}$$

是有限的, 与 $\overline{\lim_{x \rightarrow \beta^-}} |\varphi(x)| = \infty$ 矛盾. \square

事实上, $y' = p(x)y + q(x)$ 并不关于 y 满足一致 Lip 条件, 这是因为 $L = p(x)$ 有可能趋于无穷.

Example 5.2. 对于方程:

$$y' = e^{-x} + \ln(1 + y^2)$$

证明其在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在唯一整体解.

Solution. 令 $f = e^{-x} + \ln(1 + y^2)$, 那么

$$|\partial_y f| = \left| \frac{2y}{1 + y^2} \right| \leq 1$$

取 $L = 1$, 则 f 关于 y 满足一致 Lip 条件, 因此在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在唯一饱和解, 也就是饱和解. \square

Example 5.3. 对于方程:

$$y' = \sin \frac{y}{x}$$

证明其在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一整体解.

Solution.

$$\partial_y f = \frac{1}{x} \cos \frac{y}{x}$$

在 $(\varepsilon, +\infty)$ 上, 取 $L = \frac{1}{\varepsilon}$, 则 f 关于 y 满足一致 Lip 条件, 因此在 $(\varepsilon, +\infty)$ 上存在唯一饱和解. 由于 ε 的任意性, 因此在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一整体解. \square

Example 5.4. 对于方程:

$$y' = x^2 + y^2$$

证明其右行解存在区间有限.

Solution. 设最大存在区间为 $[x_0, \beta)$. 若 $\beta \leq 0$, 即证.

对于 $\beta > 0$, 找 $x_1 \in [0, \beta)$, 使得 $\forall x \in [x_1, \beta)$, 有 $y' = x^2 + y^2 \geq x_1^2 + y^2$, 因此:

$$\frac{y'}{x_1^2 + y^2} \geq 1$$

对上式在 $[x_1, \beta)$ 上积分, 得到:

$$\int_{x_1}^{\beta} \frac{y'}{x_1^2 + y^2} dx \geq \beta - x_1$$

$$\frac{1}{x_1} \arctan \frac{y}{x_1} \Big|_{y(x_1)}^{y(\beta)} \geq \beta - x_1$$

左式是有限的 ($\arctan x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$), 所以:

$$\beta \leq x_1 + \frac{1}{x_1} \arctan \frac{y}{x_1} \Big|_{y(x_1)}^{y(\beta)} < +\infty$$

因此右行解存在区间有限. □

Example 5.5. $f \in C'(\mathbb{R}^2)$, $|f|, |\partial_y f|$ 有界, 求方程组:

$$\begin{cases} y' = e^x + f(x, y) \sin [2\pi(y - e^x)] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的最大解存在区间.

Solution. 令 $F(x, y) = e^x + f(x, y) \sin [2\pi(y - e^x)]$, 则:

$$\partial_y F = \partial_y f(x, y) \sin [2\pi(y - e^x)] + 2\pi f(x, y) \cos [2\pi(y - e^x)]$$

$$|\partial_y F| \leq |\partial_y f(x, y)| + 2\pi |f(x, y)| \leq +\infty$$

因此 F 关于 y 满足一致 Lip 条件, 所以最大解存在区间为 $(-\infty, +\infty)$. □

Example 5.6. 证明对于一般的 f , 方程组:

$$\begin{cases} y' = e^x + f(x, y) \sin [2\pi(y - e^x)] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的最大解存在区间也是 $(-\infty, +\infty)$.

Solution. $\forall K \subset \mathbb{R}^2$, K 有界闭集, $|\partial_y F| \leq M < +\infty$. 因此 F 关于 y 满足局部 Lip 条件, 所以存在唯一饱和解.

注意到 $y' = e^x + f(x, y) \sin [2\pi(y - e^x)]$ 有特解:

$$y = e^x + \frac{k}{2} \quad x \in (-\infty, +\infty), k \in \mathbb{Z}$$

取 $x_0 = 0$. 则当 $y_0 = 1 + \frac{k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ 时, 存在唯一整体解 $y = e^x + \frac{k}{2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

若 $y_0 \neq 1 + \frac{k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, 则 $\exists m \in \mathbb{Z}$,

$$1 + \frac{m}{2} < y_0 < 1 + \frac{m+1}{2}$$

考虑 $\Omega = \left\{ (x, y) \mid x \in \mathbb{R}, e^x + \frac{m}{2} < y < e^x + \frac{m+1}{2} \right\}$ 由 Cauchy 问题存在唯一解, 保证解曲线与

$y = e^x + \frac{m}{2}$ 和 $y = e^x + \frac{m+1}{2}$ 不相交. 由延拓定理, 解在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在.

综上, 无论 y_0 取何值, 方程组的最大解存在区间均为 $(-\infty, +\infty)$. □

5.3.4 解存在区间估计

Theorem 5.14 (第一比较定理). 设 $f, F \in C(G)$, $G \subset \mathbb{R}^2$ 是开集, 且

$$f(x, y) < F(x, y) \quad \forall (x, y) \in G$$

设 $Y(x), y(x)$ 分别是 $\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在区间 $[x_0, a)$ 上的解, 则

$$y(x) < Y(x) \quad \forall x \in (x_0, b)$$

Solution. 令 $\psi(x) = Y(x) - y(x)$. 则 $\psi(x_0) = 0$,

$$\psi'(x_0) = F(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) > 0$$

由连续函数保号性, $\exists \beta > 0$, 使得

$$\psi'(x) > 0 \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \beta)$$

因此 $\psi(x) > 0, \forall x \in (x_0, x_0 + \beta)$.

假设 $\exists x_2 \in (x_0 + \beta, b)$, $\psi(x) > 0$, 取 $x_1 = \min\{x \in (x_0 + \beta, b) | \psi(x) > 0\}$, 则 $\psi'(x_1) \leq 0$. 但是:

$$\begin{aligned} \psi'(x_1) &= Y'(x_1) - y'(x_1) \\ &= F(x_1, Y(x_1)) - f(x_1, y(x_1)) \\ &> 0 \end{aligned}$$

矛盾, 因此 $\forall x \in (x_0, b)$, 有 $\psi(x) > 0$. □

但是有一些特殊的情况, 例如: $y' = (x - y)e^{x^2 y}$, 就无法用第一比较定理.

Definition 5.9 (右行上解). 若 $w(x) \in C'([x_0, b))$, 且满足:

$$\begin{cases} w'(x) > f(x, w(x)) & \forall x \in [x_0, b) \\ w(x_0) \geq y_0 \end{cases}$$

则称 $w(x)$ 为 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 $[x_0, b)$ 上的**右行上解**.

相应的, 有右行下解的定义.

Definition 5.10 (右行下解). 若 $v(x) \in C'([x_0, b))$, 且满足:

$$\begin{cases} v'(x) < f(x, v(x)) & \forall x \in [x_0, b) \\ v(x_0) \leq y_0 \end{cases}$$

则称 $v(x)$ 为 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 $[x_0, b)$ 上的**右行下解**.

Theorem 5.15. 方程 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 $[x_0, b)$ 上存在解 $y(x)$, 且有右行上解 $w(x)$ 和右行下解 $v(x)$, 则有

$$v(x) < y(x) < w(x) \quad \forall x \in (x_0, b)$$

Solution. 取 $g(x) = w'(x) - f(x, w(x)) > 0 (\forall x \in [x_0, b))$. 令 $F(x, y) = f(x, y) + g(x) > f(x, y)$, 则有:

$$\begin{cases} w'(x) = F(x, w(x)) \\ w(x_0) \geq y_0 \end{cases}$$

由第一比较定理可知, $\forall x \in (x_0, b)$, 有 $y(x) < w(x)$. 同理可证, $\forall x \in (x_0, b)$, 有 $v(x) < y(x)$.

所以, $\forall x \in (x_0, b)$, 有 $v(x) < y(x) < w(x)$. □

Theorem 5.16. 设区域 $G = \{(x, y) | x \in [x_0, b), y \in \mathbb{R}\}$, $f \in C(G)$, $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 $[x_0, \beta)$

上存在解 $y(x)$. 若存在右行上解 $w(x)$ 和右行下解 $v(x)$, 满足:

(1) w, v 在 $[x_0, \beta)$ 上存在, 则 $\beta \geq \beta_0$.

(2) w 在 $[x_0, \beta_0)$ 上存在, $\lim_{x \rightarrow \beta_0^-} w(x) = -\infty$, 则 $\beta \leq \beta_0$.

(3) v 在 $[x_0, \beta_0)$ 上存在, $\lim_{x \rightarrow \beta_0^-} v(x) = +\infty$, 则 $\beta \leq \beta_0$.

Solution. (1) 设 $\Omega = \{(x, y) | x \in (x_0, \beta_0), v(x) < y < w(x)\}$ 是开集, 则 y 可延拓至 $\partial\Omega$. 因为 $v(x) < y < w(x)$, 所以 y 只能延拓至 $x = \beta_0$, 因此 $\beta \geq \beta_0$.

(2) 设 $\Omega = \{(x, y) | x \in (x_0, \beta_0), y < w(x)\}$ 是开集, 则 y 可延拓至 $\partial\Omega$. 因为 $y < w(x)$, 所以 y 只能延拓至 $y \rightarrow -\infty$, 因此 $\beta \leq \beta_0$.

(3) 设 $\Omega = \{(x, y) | x \in (x_0, \beta_0), y > v(x)\}$ 是开集, 则 y 可延拓至 $\partial\Omega$. 因为 $y > v(x)$, 所以 y 只能延拓至 $y \rightarrow +\infty$, 因此 $\beta \leq \beta_0$. □

与数学分析中的上界下界概念类似, 我们可以定义“解的上界和下界”.

Definition 5.11. 若 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 $[x_0, b)$ 上存在 2 个解 $v(x), w(x)$, 且对方程组的所有解 $y(x)$, 都有 $v(x) \leq y(x) \leq w(x)$, 则称 $v(x), w(x)$ 分别为方程组在 $[x_0, b)$ 上的 **右行最小解**和**右行最大解**.

Theorem 5.17. 设区域 $R = \{(x, y) | x \in [x_0, x_0 + a), |y - y_0| < b\}$, $f \in C(R)$, 记 $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$, $M = \max_R |f|$, 则存在 $0 < h < \alpha$, 使得 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 $[x_0, x_0 + h)$ 上存在右行最小解和右行最大解. 并且右行最小解和右行最大解各自唯一.

Solution. 我们发现形式和 Peano 定理很像, 因此考虑采用 Peano 定理和第一比较定理的思路来证明.

对于 ODE:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) + \frac{1}{n} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

由 Peano 定理可知, $\exists \alpha_n > 0$, 使得 ODE 在 $[x_0, x_0 + \alpha_n]$ 上存在解 $\varphi_n(x)$, 其中 $\alpha_n = \min \left\{ a, \frac{b}{M + \frac{1}{n}} \right\}$. 令 $N = \frac{1}{\frac{b}{a} - M}$, 则 $\forall n > N$, 有 $\alpha_n \geq h$. 则 $\forall n \geq N$, $\{\varphi_n(x)\}_{n=N}^{\infty}$ 在 $[x_0, x_0 + h]$ 上存在.

设 $y(x)$ 是 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 $[x_0, x_0 + h)$ 上的解, 则由第一比较定理可知,

$$y(x) \leq \varphi_n(x) \quad \forall x \in [x_0, x_0 + h], n \geq N$$

由 Peano 定理的构造过程可知, $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[x_0, x_0 + h]$ 上一致有界且等度连续, 因此由 Arzela-Ascoli 定理可知, 存在子列 $\{\varphi_{n_j}(x)\}$ 在 $[x_0, x_0 + h]$ 上一致收敛, 记极限为 $w(x)$. 则

$$w(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, w(s)) ds \quad x \in [x_0, x_0 + h]$$

因此 $w(x)$ 是原 ODE 在 $[x_0, x_0 + h]$ 上的解, 并且

$$y(x) \leq w(x) \quad \forall x \in [x_0, x_0 + h]$$

因此 $w(x)$ 是右行最大解.

同理可证, 存在右行最小解.

由确界原理可知, 右行最大解和右行最小解各自唯一. □

Theorem 5.18 (第二比较定理). 若 $f \leq F (\forall (x, y) \in G)$, 设 Φ 是 $\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 $[x_0, b)$

上的右行最大解, φ 是 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 $[x_0, b)$ 上的右行最小解, 则

$$\varphi(x) \leq \Phi(x) \quad \forall x \in [x_0, b)$$

Solution. 设 $\exists x_2 \in [x_0, a], \Phi(x_2) < \varphi(x_2)$. 取 $x_1 = \max\{x \in [x_0, x_2], \Phi(x) = \varphi(x)\}$, 由上一个定理的证明过程, $\begin{cases} y' = f(x, y) + \frac{1}{n} \\ y(x_1) = \Phi(x_1) \end{cases}$ 在 $[x_1, x_1 + h]$ 上存在解 $\varphi_n(x)$, 且

$$\varphi_{n_j}(x) \rightrightarrows \Phi(x)$$

由第一比较定理, 有:

$$\varphi(x) < \varphi_n(x) \quad \forall x \in (x_1, x_2]$$

令 $n_j \rightarrow \infty$, 则有 $\Phi(x) \geq \varphi(x)$, 矛盾. □

Remark 5.2. 事实上, 减弱一点条件: (1) Φ 是右行最大解, φ 是右行解; (2) Φ 是右行解, φ 是右行最小解. 结论依然成立.

Remark 5.3. 第一比较定理加上关于 y 的 Lip 条件, 也能够加上等号.

Example 5.7. $f \in C([0, a] \times \mathbb{R})$, 且满足

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \frac{q}{x} |y_1 - y_2| \quad \forall x \in (0, a], y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

其中 $0 < q < 1$, 证明 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ 在 $[0, a]$ 上存在唯一解.

Solution. 这不是 Lip 条件! 首先想到 Peano 定理, $\exists \alpha > 0$, ODE 在 $[0, \alpha]$ 上存在解, 记为 $y = \varphi(x)$. 那么就在 $[\alpha, a]$ 上满足 Lip 条件, 因此在 $[\alpha, a]$ 上存在唯一解, 记为 $\psi(x)$. 由引理 5.9 可知, $\forall x \in [0, a]$, 有:

$$y(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \in [0, \alpha] \\ \psi(x) & x \in [\alpha, a] \end{cases}$$

是 ODE 在 $[0, a]$ 上的解.

下面证明唯一性. 设存在不同的解 y_1, y_2 . 不妨设 $\exists x_2 \in [0, a], y_1(x_2) < y_2(x_2)$. $x_1 = \max\{x \in [0, x_2], y_1(x) = y_2(x)\}$, 令 $u(x) = y_2(x) - y_1(x)$.

$$\begin{aligned} u'(x) &= f(x, y_2(x)) - f(x, y_1(x)) \\ &\leq \frac{q}{x} (y_2(x) - y_1(x)) \\ &= \frac{q}{x} u(x) \end{aligned}$$

因此 $(x^{-q}u)' \leq 0$, 则有:

$$\begin{aligned} x_2^{-q}u(x_2) - x^{-q}u(x) &\leq 0 \quad x \rightarrow x_1^+ \\ x_2^{-q}u(x_2) &\leq x_1^{-q}u(x_1) = 0 \end{aligned}$$

所以 $y_2(x_2) \leq y_1(x_2)$, 矛盾, 因此解唯一.

额外的, 若 $x_1 = 0$, 需要证明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-q}u(x) = 0$. 由 Lagrange 中值定理, $\exists \xi \in (0, x)$, 使得:

$$u(x) - u(0) \sim u'(\xi)(x - 0)$$

由于 u' 是有界的, 又 $0 < q < 1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = u(0) = 0$. □

5.4 连续依赖性

这部分我们考虑的是对于微分方程初值问题进行一些小扰动:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) + \varepsilon(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 + \varepsilon \end{cases}$$

是否仍有 $\varphi_\varepsilon(x) \rightarrow \varphi_0(x)$? $\varphi_0(x)$ 指没有扰动时的解.

Theorem 5.19. 设 $f, F \in C(G)$, f 关于 y 满足一致 Lip 条件, $|f - F| \leq \varepsilon$, $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

在 $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ 上有解 $y(x)$, $\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ 上有解 $\varphi(x)$, 则

$$|y(x) - \varphi(x)| \leq C\varepsilon \quad \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$$

Solution. $\forall x \in [x_0, x_0 + \alpha]$, 有:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds$$

$$\varphi = y_0 + \int_{x_0}^x F(s, \varphi(s)) ds$$

因此:

$$\begin{aligned} |y(x) - \varphi(x)| &\leq \int_{x_0}^x |f(s, y(s)) - F(s, \varphi(s))| ds \\ &\leq \int_{x_0}^x [|f(s, y(s)) - f(s, \varphi(s))| + |f(s, \varphi(s)) - F(s, \varphi(s))|] ds \\ (\text{Lip}) &\leq \int_{x_0}^x [\varepsilon + L|y(s) - \varphi(s)|] ds \end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式可知:

$$|y(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon \alpha e^{L\alpha}$$

记 $\varepsilon + L|y(s) - \varphi(s)| = LY$, 则

$$Y = \frac{\varepsilon}{L} + |y(s) - \varphi(s)| \leq \frac{\varepsilon}{L} + \int_{x_0}^x LY ds$$

由 Gronwall 不等式可知:

$$Y \leq \frac{\varepsilon}{L} e^{L\alpha}$$

因此:

$$|y(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{L} (e^{L\alpha} - 1)$$

□

Theorem 5.20. G 是 \mathbb{R}^2 上的连通开区域, $(x_0, y_0) \in G, f \in C(G)$, f 关于 y 满足局部 Lip 条件, $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 J 上存在唯一解 $\varphi(x, x_0, y_0)$, 则对于任意 $[a, b] \subset J (x_0 \in [a, b])$, 若

(ξ, η) 充分靠近 (x_0, y_0) , 则 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(\xi) = \eta \end{cases}$ 在 $[a, b]$ 上的唯一解 $\varphi(x, \xi, \eta)$ 满足:

$$\lim_{(\xi, \eta) \rightarrow (x_0, y_0)} \varphi(x, \xi, \eta) = \varphi(x, x_0, y_0)$$

Solution. 设 $\varphi(x, x_0, y_0)$ 的解曲线为 S . 由于 G 是开集, 所以存在紧集 $G_1 \subset G$, 使得 $S \subset G_1$ 的内部, 在 G_1 上, f 关于 y 满足一致 Lip 条件.

我们断言, $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \exists \delta > 0$, 使得 $\forall (\xi, \eta)$, 有:

$$(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 < \delta^2$$

$$|\varphi(x, \xi, \eta) - \varphi(x, x_0, y_0)| < \varepsilon$$

记 $\Omega_\varepsilon = \{(x, y) | x \in [a, b], |y - \varphi(x, x_0, y_0)| \leq \varepsilon\}$, 满足 $\Omega_\varepsilon \subset G_1$. 在 Ω_ε 中对 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(\xi) = \eta \end{cases}$ 进行延拓, 则 Ω_ε 中存在唯一饱和解 $f(x, \xi, \eta)$ ($x \in [c, d]$).

因此我们将这个断言转化为断言 2: $c = a, d = b$. 仅看 $d = b$ 的情况.

假设 $d < b$, 则 $|\varphi(d, \xi, \eta) - \varphi(d, x_0, y_0)| = \varepsilon$, 而 $\varphi(x, \xi, \eta) = \eta + \int_\xi^x f(s, \varphi(s)) ds$, $\varphi(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds$, 因此:

$$\begin{aligned} |\varphi(d, \xi, \eta) - \varphi(d, x_0, y_0)| &\leq |\eta - y_0| + \left| \int_{x_0}^\xi f ds \right| + \int_\xi^x |f(s, \varphi(s, \xi, \eta)) - f(s, \varphi(s, x_0, y_0))| ds \\ &\leq \delta + M\delta + \int_\xi^x L|\varphi(s, \xi, \eta) - \varphi(s, x_0, y_0)| ds \end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式可知:

$$|\varphi(d, \xi, \eta) - \varphi(d, x_0, y_0)| \leq \delta(1 + M)e^{L(b-a)}$$

为了导出矛盾, 需要 $\delta(1 + M)e^{L(b-a)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. 因此取 $\delta = \min\{x_0 - a, b - x_0, \varepsilon, \frac{\varepsilon}{2(1 + M)}e^{-L(b-a)}\}$, 得到矛盾, 断言 2 成立! \square

事实上, 若 $f \in C(G)$ 关于 y 满足一致 Lip 条件, 则三元函数 $\varphi(x; x_0, y_0)$ 连续.

Theorem 5.21. 设 G 是 \mathbb{R}^2 上的连通开区域, $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(G)$, $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 的解 $\varphi(x, x_0, y_0)$ 在其定义域上连续可微.

Solution. 上一个定理说明了连续性. 下面直接求出偏导来证明可微性.

$$\varphi(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s, x_0, y_0)) ds$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} &= 0 - f(x_0, \varphi(x_0, x_0, y_0)) \\ &\quad + \int_{x_0}^x \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} ds \end{aligned}$$

记为 $z(x) = -f(x_0, y_0) + \int_{x_0}^x \frac{\partial f}{\partial y} z(s) ds$, 则 $z(x)$ 满足:

$$\begin{cases} z' = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x, x_0, y_0))z \\ z(x_0) = -f(x_0, y_0) \end{cases}$$

因此:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = -f(x_0, y_0) \exp \left\{ \int_{x_0}^x \frac{\partial f}{\partial y}(s, \varphi(s, x_0, y_0)) ds \right\}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_0} = 1 + \int_{x_0}^x \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} ds$$

记为 $w(x) = 1 + \int_{x_0}^x \frac{\partial f}{\partial y} w(s) ds$, 则 $w(x)$ 满足:

$$\begin{cases} w' = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x, x_0, y_0))w \\ w(x_0) = 1 \end{cases}$$

因此:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_0} = \exp \left\{ \int_{x_0}^x \frac{\partial f}{\partial y}(s, \varphi(s, x_0, y_0)) ds \right\}$$

□

Example 5.8. 方程组:

$$\begin{cases} y' = \sin(xy) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

有解 $\varphi(x, x_0, y_0)$, 求 $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \Big|_{(x_0, y_0)=(0,0)}$ 和 $\frac{\partial \varphi}{\partial y_0} \Big|_{(x_0, y_0)=(0,0)}$.

Solution. $f = \sin(xy)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x \cos(xy)$. $\begin{cases} y' = \sin(xy) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 有唯一解 $y = 0$, $\varphi(x; 0, 0) = 0$. 因此:

$$\begin{aligned} f_y(x, \varphi(x; 0, 0)) &= f_y(x, 0) = x \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \Big|_{(0,0)} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} \Big|_{(0,0)} &= \exp \left\{ \int_0^x s ds \right\} = e^{\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

□

Example 5.9. 方程组:

$$\begin{cases} y' = f(x, y, \lambda) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

求 $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$.

Solution.

$$\varphi(x, x_0, y_0, \lambda) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s, x_0, y_0, \lambda), \lambda) ds$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \int_{x_0}^x \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} ds + \int_{x_0}^x \frac{\partial f}{\partial \lambda} ds$$

记为 $u(x) = \int_{x_0}^x \frac{\partial f}{\partial y} u(s) ds + \int_{x_0}^x \frac{\partial f}{\partial \lambda} ds$, 则 $u(x)$ 满足:

$$\begin{cases} u' = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x, x_0, y_0, \lambda))u + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \varphi(x, x_0, y_0, \lambda)) \\ u(x_0) = 0 \end{cases}$$

因此:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \int_{x_0}^x \frac{\partial f}{\partial \lambda}(s, \varphi(s, x_0, y_0, \lambda)) \exp \left\{ \int_s^x \frac{\partial f}{\partial y}(t, \varphi(t, x_0, y_0, \lambda)) dt \right\} ds$$

□

5.5 求解高阶 ODEs

5.5.1 首次积分法

Example 5.10. 求解 ODE:

$$\begin{cases} x' = y - x(x^2 + y^2 - 1) \\ y' = -x - y(x^2 + y^2 - 1) \end{cases}$$

Solution.

$$\begin{aligned} x'y - y'x &= x^2 + y^2 \\ \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2} &= -1 \end{aligned}$$

得到:

$$\begin{aligned} \arctan \frac{y}{x} + t &= C_1 \\ x'x + y'y &= -(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) \\ \frac{(x^2 + y^2)'}{2} &= -(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) \end{aligned}$$

得到:

$$\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2} \cdot e^{2t} = C_2$$

联立两个方程, 得到通解.

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{1 - C_2 e^{-2t}}} \cos(C_1 - t) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{1 - C_2 e^{-2t}}} \sin(C_1 - t) \end{aligned}$$

□

Definition 5.12. 设 $\mathbf{X}' = F(t, \mathbf{X})$, $G \subset \mathbb{R}^2$, Φ 在 G 中连续可微, 且不恒等于常数. 若对 $\mathbf{X}' = F(t, \mathbf{X})$ 的任意解 $\mathbf{X}(t)$, 都有

$$\Phi(t, \mathbf{X}(t)) = \text{常数}$$

则称 $\Phi(t, \mathbf{X})$ 为 $\mathbf{X}' = F(t, \mathbf{X})$ 的一个 **首次积分**.

5.5.2 Hamilton 系统

Definition 5.13. 设 $H \in C'(G)$, $G \subset \mathbb{R}^2$, 则称方程组:

$$\begin{cases} x' = \frac{\partial H}{\partial y} \\ y' = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

为 **Hamilton 系统**, $H(t, x, y)$ 为 **Hamilton 量**.

判断依据: $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0$. 得到的 **Hamilton 量**即为首次积分.

5.5.3 极坐标法

进行变换:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

从而将 ODE 转化为 r, θ 的方程组.

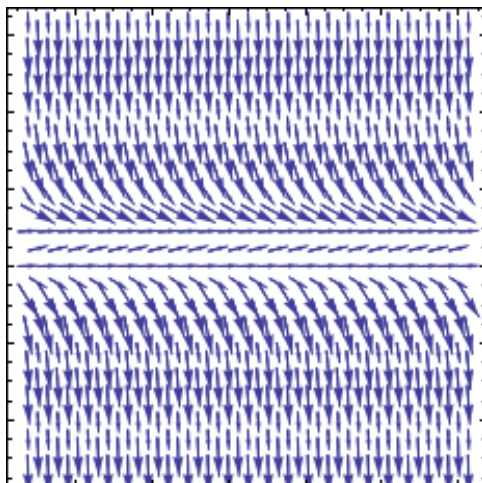
6 稳定性理论

前面连续依赖性的章节，我们关注的是一段区间内，解对初值的依赖性。但是我们没办法照顾到全空间的情况。这个章节我们关注的是整个空间中，解对初值的依赖性，也就是稳定性理论。

我们看到这个函数对应的解曲线：

$$y' = y - y^2$$

已知有两个解： $y = 0$ 和 $y = 1$ 。我们发现，初值在 1 附近的解，都会趋向于 1；初值在 0^+ 附近的



解，都会趋向于 1；而初值在 0^- 附近的解，都会趋向于 0。因此我们说， $y = 1$ 附近比较“稳定”，而 $y = 0$ 附近比较“不稳定”。

Definition 6.1. 设 $\mathbf{X}' = F(t, \mathbf{X})$, F 连续, 且关于 \mathbf{X} 满足 Lip 条件, $\varphi(t)$ 为 $(\beta, +\infty)$ 上的解.

若 $\forall \varepsilon > 0, t_0 > \beta, \exists \delta > 0$, 使得 $\forall \mathbf{X}_0 (\|\mathbf{X}_0 - \varphi(t_0)\| < \delta)$, 都有 $\begin{cases} \mathbf{X}' = F(t, \mathbf{X}) \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{cases}$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上存在解 $\mathbf{X}(t; t_0, \mathbf{X}_0)$, 且

$$\|\mathbf{X}(t; t_0, \mathbf{X}_0) - \varphi(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$$

则称 $\varphi(t)$ 是稳定的.

Definition 6.2. 若 $\exists \varepsilon > 0, t_0 > \beta, \forall \delta > 0$, 使得 $\exists \mathbf{X}_0 (\|\mathbf{X}_0 - \varphi(t_0)\| < \delta)$, 使得 $\begin{cases} \mathbf{X}' = F(t, \mathbf{X}) \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{cases}$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上不存在解 $\mathbf{X}(t; t_0, \mathbf{X}_0)$, 或者存在解 $\mathbf{X}(t; t_0, \mathbf{X}_0)$, 但

$$\exists t_1 > t_0, \|\mathbf{X}(t_1; t_0, \mathbf{X}_0) - \varphi(t_1)\| \geq \varepsilon$$

则称 $\varphi(t)$ 是不稳定的.

Definition 6.3. $\forall t > \beta, \exists \eta > 0$, 使得: 只要 $\|\mathbf{X}_0 - \varphi(t)\| < \eta$, 都有 $\begin{cases} \mathbf{X}' = F(t, \mathbf{X}) \\ \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 \end{cases}$ 在

$[t, +\infty)$ 上存在解 $\mathbf{X}(t; t, \mathbf{X}_0)$, 且

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{X}(t; t, \mathbf{X}_0) - \varphi(t)\| = 0$$

则称 $\varphi(t)$ 是吸引的.

Definition 6.4. 若 $\varphi(t)$ 既是稳定的又是吸引的, 则称 $\varphi(t)$ 是渐近稳定的.

那么如何判断一个解是否稳定呢? 最朴素的是求出解然后用定义. 对于一些特殊的情况, 我们有更方便的方法.

6.1 LODEs 的稳定性

对于 LODEs:

$$\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X}$$

Theorem 6.1. 零解稳定, 等价于: $\forall t_0 > \beta, \exists K(t_0)$, 使得

$$\|\Phi(t)\| \leq K(t_0) \quad \forall t \geq t_0$$

Solution. 先证明充分性. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{K\|\Phi^{-1}(t)\|}$ 使得:

$$\|\mathbf{X}_0\| \leq \|\Phi(t)\|\|\Phi^{-1}(t)\|\|\mathbf{X}_0\| < K\|\Phi^{-1}(t)\|\delta = \varepsilon$$

再证明必要性. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得对于所有的 $\|\mathbf{X}_0\| < \delta$, 都有

$$\|\mathbf{X}(t; t_0, \mathbf{X}_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

则有 $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{X}_0\| < \varepsilon$. 取 $\mathbf{X}_i = \frac{\delta}{2}e_i$, 其中 e_i 为标准正交基, 则有:

$$\|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)e_i\| < \varepsilon \frac{2}{\delta}$$

$$\|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)E\| < \varepsilon \frac{2n}{\delta}$$

$$\begin{aligned} \|\Phi(t)\| &\leq \|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\|\|\Phi(t_0)\| \\ &< \varepsilon \frac{2n}{\delta} \|\Phi(t_0)\| \\ &= K \end{aligned}$$

□

Theorem 6.2. 零解渐近稳定, 等价于:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\Phi(t)\| = 0$$

如果 A 是常矩阵, 则有更简单的判据.

Theorem 6.3. 设 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 为常实数矩阵, 则 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ 零解稳定的充分必要条件为:

$$\operatorname{Re}\lambda_i \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

且 $\operatorname{Re}\lambda_i = 0$ 时对应的 *Jordan* 块为一阶的.

Theorem 6.4. 设 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 为常实数矩阵, 则 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ 零解渐近稳定的充分必要条件为:

$$\operatorname{Re}\lambda_i < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Theorem 6.5. 设 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 为常实数矩阵, 则 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ 零解不稳定的充分条件为:

$$\exists i, \text{使得 } \operatorname{Re}\lambda_i > 0$$

或者

$$\exists i, \text{使得 } \operatorname{Re}\lambda_i = 0, \text{ 且对应的 } \textit{Jordan} \text{ 块不止一阶}$$

6.2 线性近似法

我们考虑非线性微分方程:

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + R(t, \mathbf{X})$$

其中 $R(t, \mathbf{X})$ 满足:

$$\lim_{\|\mathbf{X}\| \rightarrow 0} \frac{\|R(t, \mathbf{X})\|}{\|\mathbf{X}\|} = 0$$

Theorem 6.6. 若 A 的所有特征值的实部均小于零, 则 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + R(t, \mathbf{X})$ 的零解渐近稳定.

Solution. 运用 Picard 定理和延拓定理进行证明.

$$\begin{cases} \mathbf{X}' = A\mathbf{X} + R(t, \mathbf{X}) \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{cases}$$

存在唯一解 $\mathbf{X}(t), t \in [t_0, T)$.

$$\mathbf{X}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}R(s, \mathbf{X}(s)) ds$$

$$\|\mathbf{X}(t)\| \leq \|e^{A(t-t_0)}\|\|\mathbf{X}_0\| + \int_{t_0}^t \|e^{A(t-s)}\|\|R\| ds$$

由于 A 的所有特征值的实部均小于零, $\sigma > 0$, 使得

$$\operatorname{Re}\lambda_i < -\sigma \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$|e^{\lambda_i t}| \leq e^{-\sigma t}$$

因此, $\exists M > 0$, 使得:

$$\|e^{At}\| \leq Me^{-\frac{\sigma}{2}t}$$

所以

$$\|\mathbf{X}(t)\| \leq M e^{-\frac{\sigma}{2}(t-t_0)} \|\mathbf{X}_0\| + \int_{t_0}^t M e^{-\frac{\sigma}{2}(t-s)} \varepsilon_1 \|\mathbf{X}\| ds$$

得到:

$$e^{\frac{\sigma}{2}t} \|\mathbf{X}(t)\| \leq M e^{\frac{\sigma}{2}t_0} \|\mathbf{X}_0\| + \int_{t_0}^t M \varepsilon_1 e^{\frac{\sigma}{2}s} \|\mathbf{X}(s)\| ds$$

由 Gronwall 不等式可知:

$$e^{\frac{\sigma}{2}t} \|\mathbf{X}(t)\| \leq M e^{\frac{\sigma}{2}t_0} \|\mathbf{X}_0\| e^{\int_{t_0}^t M \varepsilon_1 ds} = M e^{\frac{\sigma}{2}t_0} \|\mathbf{X}_0\| e^{M \varepsilon_1 (t-t_0)}$$

因此:

$$\|\mathbf{X}(t)\| \leq M e^{(M \varepsilon_1 - \frac{\sigma}{2})(t-t_0)} \|\mathbf{X}_0\|$$

$$\|\mathbf{X}(t)\| = M e^{-\frac{\sigma}{4}(t-t_0)} \|\mathbf{X}_0\|$$

因此 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon \text{or} \delta_1}{2M}$, 当 $\|\mathbf{X}_0\| < \delta$ 时, 有

$$\|\mathbf{X}(t)\| < \frac{\varepsilon \text{or} \delta_1}{2} \quad \forall t \geq t_0$$

由延拓定理可知, $\mathbf{X}(t)$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上存在唯一解. 且

$$\|\mathbf{X}(t)\| \leq \frac{\varepsilon \text{or} \delta_1}{2} e^{-\frac{\sigma}{4}(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0$$

□

Theorem 6.7. 若 A 存在特征值的实部大于零, 则 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + R(t, \mathbf{X})$ 的零解不稳定.

Theorem 6.8. 实系数特征多项式

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

所有根有负实部的必要条件为:

$$\frac{a_j}{a_0} > 0 \quad (j = 0, 1, \cdots, n)$$

Theorem 6.9 (Routh-Hurwitz 准则). 实系数特征多项式

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

所有根有负实部的充分必要条件为: Routh-Hurwitz 行列式

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

的所有顺序主子式均大于零.

Example 6.1. 求:

$$\begin{cases} x' = -2x + y - z + x^3 e^y \\ y' = x - y + z^3 xy \\ z' = x + y - z - e^x (\cos z - 1) \end{cases}$$

的零解的稳定性.

Solution. 满足

$$\lim_{\|\mathbf{X}\| \rightarrow 0} \frac{\|R(t, \mathbf{X})\|}{\|\mathbf{X}\|} = 0$$

$$|A - \lambda E| = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 3 = 0, \text{ 看 } \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 4 > 0, \Delta_2 = 17 > 0, \Delta_3 = 51 > 0$ 所以 $\forall \lambda_i, \operatorname{Re} \lambda_i < 0$, 因此零解渐近稳定. \square

6.3 Lyapunov 第二方法

我们这一部分仅研究自治系统:

$$\mathbf{X}' = F(\mathbf{X})$$

零解的稳定性.

Definition 6.5. 若 $V(\mathbf{X})$ 满足: (1) $V(0) = 0$; (2) 存在 h , 对所有 $\|\mathbf{X}\| < h$, 都有 $V(\mathbf{X}) \in C'$; (3) 对所有 $0 < \|\mathbf{X}\| < h$, 都有 $V(\mathbf{X}) > 0 (< 0)$. 则称 $V(\mathbf{X})$ 为**正定 (负定) 函数**.

Definition 6.6. 若 $V(\mathbf{X})$ 满足: (1) $V(0) = 0$; (2) 存在 h , 对所有 $\|\mathbf{X}\| < h$, 都有 $V(\mathbf{X}) \in C'$; (3) 对所有 $0 < \|\mathbf{X}\| < h$, 都有 $V(\mathbf{X}) \leq 0 (\geq 0)$. 则称 $V(\mathbf{X})$ 为**常负 (常正) 函数**.

Theorem 6.10. $\mathbf{X}' = F(\mathbf{X}), F(0) = 0$. 若存在 $h > 0$, $\|\mathbf{X}\| \leq h$ 上的正定函数 $V(\mathbf{X})$, 且全

$$\nabla_{\mathbf{X}} V(\mathbf{X}) \cdot F(\mathbf{X})$$

是常负的, 则零解是稳定的.

Theorem 6.11. $\mathbf{X}' = F(\mathbf{X}), F(0) = 0$. 若存在 $h > 0$, $\|\mathbf{X}\| \leq h$ 上的正定函数 $V(\mathbf{X})$, 且全

$$\nabla_{\mathbf{X}} V(\mathbf{X}) \cdot F(\mathbf{X})$$

是定负的, 则零解是渐近稳定的.

Theorem 6.12. $\mathbf{X}' = F(\mathbf{X}), F(0) = 0$. 若存在 $h > 0$, $\|\mathbf{X}\| \leq h$ 上的正定函数 $V(\mathbf{X})$, 且全

$$\nabla_{\mathbf{X}}V(\mathbf{X}) \cdot F(\mathbf{X})$$

是定正的, 则零解是不稳定的.

Theorem 6.13. 若存在 $V(\mathbf{X})$ 在 0 的某个邻域 B_δ 的开子区域 N 上满足: (1) $V(0) \in C'(N)$; (2) $\{0\} \in \partial N, V|_{\partial N} = 0$; (3) $N \cap B_\delta$ 上, 全导数

$$\nabla_{\mathbf{X}}V(\mathbf{X}) \cdot F(\mathbf{X})$$

是定正的, 则零解是不稳定的.

上述定理中, 函数 $V(\mathbf{X})$ 称为 **Lyapunov 函数**. 通过寻找 Lyapunov 函数来解决零点稳定性问题的方法, 称为 **Lyapunov 第二方法**.

7 几何理论

当我们将自治微分方程组:

$$\begin{cases} \mathbf{X}' = F(\mathbf{X}) \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{cases}$$

的解 $\varphi(t; t_0, \mathbf{X}_0)$ 中的 t 视为自变量, 将以 t 为参数且沿着 t 增加的方向的曲线 $\mathbf{X} = \varphi(t; t_0, \mathbf{X}_0)$ 称为**轨线**, 将表明所有轨线之间位置关系的拓扑结构图称为**相图**.

其实轨线就是积分曲线在相空间中的投影.

Theorem 7.1 (轨线的唯一性). 自治微分方程组的任意两条轨线不相交.

若对一切 $t \in (-\infty, +\infty)$, $\varphi(t) = \mathbf{x}_0$ 为常向量, 则称 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ 为一个**平衡解**, 称该点为自治微分方程组的一个**奇点**.

7.1 线性方程

我们考虑的是对于一个自治微分方程组:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

其奇点为 $(0, 0)$, 研究奇点附近的轨线形状.

第一种方法是将解求出来, 然后分析解的形状. 但是这种方法并不总是最好的.

我们记 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 解出特征值 λ_1, λ_2 , 并讨论以下几种情况:

1. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ 为稳定结点. 求解:

$$\frac{y'}{x'} \Big|_{y=kx} = k$$

得到两条直轨线 $y = k_1x$ 和 $y = k_2x$. 再根据 $y' \Big|_{(1,0)}$ 的符号判断非直轨线的方向.

2. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ 为不稳定结点. 求解:

$$\frac{y'}{x'} \Big|_{y=kx} = k$$

得到两条直轨线 $y = k_1x$ 和 $y = k_2x$. 再根据 $y' \Big|_{(1,0)}$ 的符号判断非直轨线的方向.

3. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ 为鞍点. 求解:

$$\frac{y'}{x'} \Big|_{y=kx} = k$$

得到两条直轨线 $y = k_1x$ 和 $y = k_2x$. 再根据 $y' \Big|_{(1,k_1)}$ 的符号判断直轨线的方向, 随之即得非直轨线的方向.

4. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, 根据 λ 符号判断是否稳定. 求解:

$$\frac{y'}{x'} \Big|_{y=kx} = k$$

若只有一个 k , 则为退化结点. 再根据 $y' \Big|_{(1,0)}$ 的符号判断非直轨线的方向; 若有无穷多个 k , 则为星形结点.

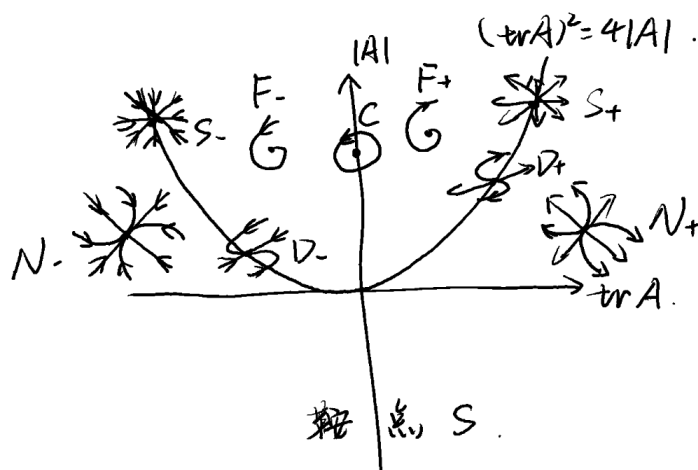
5. $\lambda = \alpha \pm i\beta$. 若 $\alpha = 0$, 则为中心; 若 $\alpha < 0$, 则为稳定焦点, 根据 $y' \Big|_{(1,0)}$ 的符号判断旋转方向; 若 $\alpha > 0$, 则为不稳定焦点, 根据 $y' \Big|_{(1,0)}$ 的符号判断旋转方向.

更一般的, 我们可以转换成极坐标形式 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$, 从而得到:

$$y'x - x'y = r^2\theta'$$

根据正负判断旋转方向. 事实上, 前面的 $y' \Big|_{(1,0)} = (y'x - x'y) \Big|_{(1,0)}$, 是一样的.

同时注意到 λ_1, λ_2 由 $\text{tr}A$ 和 $\det A$ 决定, 所以有如下分布图



7.2 非线性方程

对于非线性的自治微分方程组:

$$\begin{cases} x' = ax + by + R_1 \\ y' = cx + dy + R_2 \end{cases}$$

若满足 $\|(R_1, R_2)\| = o(\|(x, y)\|)$, 则对应线性方程组的结点类型为 S, N_{\pm}, F_{\pm} 时, 非线性方程组在奇点处的轨线形状与线性方程组相同.

若满足 $\|(R_1, R_2)\| = o(\|(x, y)\|^{1+\delta})$ ($\delta > 0$), 则对应线性方程组的结点类型为 S_{\pm}, D_{\pm} 时, 非线性方程组在奇点处的轨线形状与线性方程组相同.

若奇点并不是原点, 则可以通过平移变换将奇点移到原点, 再进行判断.

8 一阶偏微分方程 (PDE)

一阶偏微分方程的一般形式为:

$$F(t, x, u, u_t, u_x) = 0$$

如果 $\partial_t u = 0$, 那么有 $u(t, x) = g(x)$, ($g \in C'$), 也就转化为常微分方程.

8.1 一阶 LPDE

如果满足 $\partial_t u + c\partial_x u = 0$, 则为一阶线性偏微分方程. 我们可以有两种看法:

1. $(1, c) \cdot (\partial_t u, \partial_x u) = 0$, $(1, c)$ 与 $(\partial_t u, \partial_x u)$ 垂直.
2. 以 x 为横轴, t 为纵轴, 记 $V = (c, 1)$, 则 u 沿着 V 的方向导数:

$$\begin{aligned} D_V u &= V \cdot Du \\ &= V \cdot (\partial_x u, \partial_t u) \\ &= c\partial_x u + \partial_t u \\ &= 0 \end{aligned}$$

即 u 沿着直线 $x = x_0 + ct$ 不变, 则有:

$$u(t, x) = g(x - ct) \quad (g \in C')$$

3. 做变换 $\begin{cases} \tilde{x} = cx + t \\ \tilde{t} = -x + ct \end{cases}$, 则有:

$$\begin{aligned} \partial_x u &= \partial_{\tilde{x}} u \cdot \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} + \partial_{\tilde{t}} u \cdot \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x} \\ &= c\partial_{\tilde{x}} u - \partial_{\tilde{t}} u \\ \partial_t u &= \partial_{\tilde{x}} u \cdot \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} + \partial_{\tilde{t}} u \cdot \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} \\ &= \partial_{\tilde{x}} u + c\partial_{\tilde{t}} u \\ \partial_t u + c\partial_x u &= (1 + c^2)\partial_{\tilde{x}} u = 0 \end{aligned}$$

所以 $u = g(\tilde{t}) = g(-x + ct)$, $\forall g \in C'$.

我们将 $x = x_0 + ct$ 称为**特征线**. 将其参数化:

$$\begin{cases} t = s \\ x = x_0 + cs \end{cases}$$

则原方程转化为:

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = 1 & t|_{s=0} = 0 \\ \frac{dx}{ds} = c & x|_{s=0} = x_0 \end{cases}$$

那么就有

$$u(t, x) = u(t(s), x(s)) = \tilde{u}(s)$$

$$\begin{aligned}\frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} \\ &= \partial_t u + c \partial_x u \\ &= 0\end{aligned}$$

$$u|_{s=0} = g(x_0)$$

如果加上初值:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 \\ u|_{t=0} = g(x) \end{cases}$$

我们可以转变成:

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = 1 & t|_{s=0} = 0 \\ \frac{dx}{ds} = c & x|_{s=0} = x_0 \\ \frac{du}{ds} = 0 & u|_{s=0} = g(x_0) \end{cases}$$

变成常微分方程组进行求解.

8.2 一般的一阶 LPDE

对于一般的方程:

$$au_t + bu_x = c, u|_{t=0} = g(x)$$

我们有特征线方程:

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = a & t|_{s=0} = 0 \\ \frac{dx}{ds} = b & x|_{s=0} = x_0 \\ \frac{du}{ds} = c & u|_{s=0} = g(x_0) \end{cases}$$

其中 $a = a(t, x, u), b = b(t, x, u), c = c(t, x, u)$. 由 Picard 定理可知有唯一解: $\begin{cases} t = t(s, x_0) \\ x = x(s, x_0) \\ u = u(s, x_0) \end{cases}$ 中, t, x

由隐函数定理可知存在 $s = s(t, x), x_0 = x_0(t, x)$. 因此有解:

$$u = u(s(t, x), x_0(t, x)) = \tilde{u}(t, x)$$

Example 8.1 (Burgers 方程). 求解:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u|_{t=0} = x \end{cases}$$

Solution. 特征线方程:

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = 1 & t|_{s=0} = 0 \\ \frac{dx}{ds} = u & x|_{s=0} = x_0 \\ \frac{du}{ds} = 0 & u|_{s=0} = x_0 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} t = s \\ u = x_0 \end{cases}$$

代入第二条，得到 $x = x_0 s + x_0$ ，因此有：

$$x_0 = \frac{x}{t+1}$$

所以解为：

$$u = \frac{x}{t+1}$$

□

Example 8.2. 求解：

$$\begin{cases} u_t + xu_x = x \\ u|_{t=0} = x^3 \end{cases}$$

Solution. 特征线方程：

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = 1 & t|_{s=0} = 0 \\ \frac{dx}{ds} = x & x|_{s=0} = x_0 \\ \frac{du}{ds} = x & u|_{s=0} = x_0^3 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} t = s \\ x = x_0 e^s \end{cases}$$

代入第三条，得到：

$$u = x_0^3 + x_0(e^s - 1)$$

所以解为：

$$u = x^3 e^{-3t} + x(1 - e^{-t})$$

□

上面的特征线法，通过找特征线，将偏微分方程转化为常微分方程组进行求解。

8.3 首次积分法

先看其次的：

$$A_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + A_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

其特征方程为：

$$\frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \cdots = \frac{dx_n}{A_n}$$

得到 $n-1$ 个首次积分 φ_i ，则通解为：

$$u = g(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) \quad \forall g \in C'$$

非齐次情况下，我们先看二元的：

$$A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} = C$$

那么 $\exists F, F(x, y, u) = 0$ ，则有：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_u}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_u}$$

代入原方程，得到：

$$AF_x + BF_y + CF_u = 0$$

变成了齐次方程. 其特征方程为：

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{du}{C}$$

得到两个首次积分 φ_1, φ_2 ，则通解为：

$$F = g(\varphi_1, \varphi_2) = 0 \quad \forall g \in C'$$

Example 8.3. 求解：

$$uu_t + u_x = 1$$

过曲线 $t = a, x = a, u = \frac{1}{2}a$.

Solution. (1) 特征线法.

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = u & t|_{s=0} = a \\ \frac{dx}{ds} = 1 & x|_{s=0} = a \\ \frac{du}{ds} = 1 & u|_{s=0} = \frac{1}{2}a \end{cases}$$

解得：

$$x = a + s, u = \frac{1}{2}a + s$$

代入第一条，得到：

$$t = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}as + a$$

所以：

$$s = \frac{t-x}{\frac{1}{2}x-1}, a = x - \frac{t-x}{\frac{1}{2}x-1}$$

因此解为：

$$u = \frac{1}{2} \left(x - \frac{t-x}{\frac{1}{2}x-1} \right) + \frac{t-x}{\frac{1}{2}x-1}$$

(2) 首次积分法.

$$\frac{dt}{u} = \frac{dx}{1} = \frac{du}{1}$$

$$\frac{dt}{u} = \frac{du}{1} \quad \therefore t - \frac{1}{2}u = c_1$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{du}{1} \quad \therefore x - u = c_2$$

因此解为：

$$\Phi \left(t - \frac{1}{2}u, x - u \right) = 0$$

不妨设 $t - \frac{1}{2}u = f(x - u)$. 代入初始条件, 得到:

$$\begin{aligned} a - \frac{1}{8}a^2 &= f\left(a - \frac{1}{2}a\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2}a\right) \end{aligned}$$

所以:

$$f(\xi) = 2\xi - \frac{1}{2}\xi^2$$

代入 $t - \frac{1}{2}u = f(x - u)$, 得到:

$$t - \frac{1}{2}u = 2(x - u) - \frac{1}{2}(x - u)^2$$

因此解为:

$$u^2 - 2(x + 1)u + 4x - 2t = 0$$

□