常微分方程（中）整理笔记

手写电子版纠错与 LaTeX 重排版

本讲义依据上传的《常微分（中）》手写笔记重构而成。原稿的主题是常微分方程，内容从一阶方程、全微分方程、线性方程理论、常系数线性方程、待定系数法、欧拉方程、降阶法、参数变易法一直到一阶线性微分方程组。整理时对易误读的手写符号和不完整推导作了数学纠错，并统一了记号、条件与公式。

编译方式：XeLaTeX　纸张：A4　字体：Noto CJK

2026 年 4 月 25 日

目录

整理原则与关键纠错

重点纠错说明

(1) 原手写页的主题是**常微分方程**，并非级数敛散性。本文按照原稿实际内容重构为常微分方程讲义。

(2) 一阶线性方程的积分因子统一记为 $\mu(x) = \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$，因此通解应写成 $y = \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int f(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right)$。

(3) 伯努利方程在作代换 $z = y^{1-n}$ 前默认 $y \neq 0$。若 $n > 0$ 且方程在 $y = 0$ 处有意义，则 $y \equiv 0$ 还应单独补入。

(4) 全微分方程的判别条件 $M_y = N_x$ 要求在单连通区域内讨论；若区域不单连通，局部判别与全局势函数可能不同。

(5) 欧拉方程作 $x = \mathrm{e}^t$ 时，二阶导数应为 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\right)$，其中 $Y(t) = y(\mathrm{e}^t)$。这是原稿中最容易因手写识别遗漏平方因子的地方。

(6) 参数变易法中，标准方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的方程组是 $u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$，$u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x)$，由此得到 $u_1' = -\frac{y_2 f}{W}$，$u_2' = \frac{y_1 f}{W}$，其中 $W = y_1y_2' - y_1'y_2$。

学习主线

一阶方程的核心是通过**分离变量、变量代换、积分因子**把微分方程化成可积分形式；高阶线性方程的核心是把解空间看成线性空间，用**基本解组、朗斯基行列式、特征方程、特解构造**处理齐次与非齐次问题；微分方程组则把高阶标量方程统一到矩阵形式。

第 1 节 常微分方程的基本概念与初值问题

1.1 常微分方程与偏微分方程

定义 1.1 (常微分方程). 若微分方程中的未知函数只含一个自变量，则称该方程为常微分方程，简称微分方程或方程。若未知函数含两个或两个以上自变量，则称为偏微分方程。

常微分方程的阶数是方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数。例如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$$

是一阶常微分方程，而

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

是标准形式的 n 阶常微分方程。

定义 1.2 (解、通解、特解与积分曲线). 设 $y=\varphi(x)$ 在区间 I 上有足够阶导数。若代入微分方程后恒等成立，则称 $y=\varphi(x)$ 为该方程在 I 上的一个解。含有任意常数、并能表示一族解的表达式称为通解；给定初值后确定的解称为特解。解的图像称为积分曲线。

若由关系式 $\Phi(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=\varphi(x)$ 满足微分方程，则称 $\Phi(x,y)=0$ 为该方程的一个隐式积分；若其含有一个任意常数，则称为通积分。

1.2 一阶初值问题的存在唯一性

考虑一阶初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

定理 1.1 (一阶方程局部存在唯一性). 设矩形区域

$$D = \{(x,y) : |x-x_0| \le a,\ |y-y_0| \le b\}$$

内函数 $f(x,y)$ 连续，且 $f_y(x,y)$ 连续。则初值问题(1.1) 在 x_0 的某个邻域内存在唯一解。若

$$M = \max_{(x,y)\in D} |f(x,y)|,$$

并且 $M>0$，则可取一个存在区间 $|x-x_0| \le h$，其中

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

当 $M=0$ 时可取 $h=a$。

注 1.1. 条件 f_y 连续意味着 f 对 y 局部满足 Lipschitz 条件，这是唯一性的关键。仅有 f 连续通常只能保证局部存在性，不能保证唯一性。

1.3 高阶初值问题的存在唯一性

考虑标准形式的 n 阶初值问题

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big), \\ y^{(i)}(x_0) = y_i^0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases} \tag{1.2}$$

定理 1.2 (高阶方程局部存在唯一性). 设 $f\big(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\big)$ 以及它关于 $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ 的偏导数在包含初值点的区域内连续，则初值问题(1.2) 在 x_0 的某个邻域内存在唯一解。

注 1.2. 高阶方程的存在唯一性常通过引入变量

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad \dots, \quad x_n = y^{(n-1)}$$

化为一阶方程组的存在唯一性来证明。

第 2 节 一阶微分方程的初等解法

2.1 可分离变量方程

定义 2.1 (可分离变量方程). 若一阶方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(x)\psi(y), \tag{2.1}$$

其中 φ 与 ψ 分别只依赖于 x 与 y，则称为可分离变量方程。

若在所讨论解曲线上 $\psi(y) \neq 0$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)} = \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

两边积分得隐式通解

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)} = \int \varphi(x)\,\mathrm{d}x + C. \tag{2.2}$$

若存在常数 y_* 使 $\psi(y_*) = 0$，则

$$y(x) \equiv y_*$$

也是方程(2.1) 的一个常值解。这个解在分离变量时被除掉，必须单独检查。

可分离变量方程的求解步骤

(1) 判断能否写成 $y' = \varphi(x)\psi(y)$。

(2) 对 $\psi(y) \neq 0$ 的部分作分离变量并积分。

(3) 单独补查 $\psi(y) = 0$ 给出的常值解。

(4) 若有初值，用初值确定积分常数；必要时保持隐式形式。

2.2 齐次方程

定义 2.2 (一阶齐次方程). 若一阶方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right), \qquad x \neq 0, \tag{2.3}$$

则称其为一阶齐次方程。

令

$$u = \frac{y}{x}, \qquad y = ux.$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

代入(2.3) 得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g(u) - u, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{g(u)-u}{x}. \tag{2.4}$$

这已成为可分离变量方程:

$$\frac{\mathrm{d}u}{g(u)-u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}. \tag{2.5}$$

注 2.1. 若存在 u_0 使 $g(u_0) - u_0 = 0$，则 $u \equiv u_0$，即 $y = u_0 x$ 是原齐次方程的直线解。它也应单独补查。

2.3 一阶线性微分方程

定义 2.3 (一阶线性方程). 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = f(x) \tag{2.6}$$

的一阶方程称为一阶线性微分方程。其中 $p(x), f(x)$ 为已知连续函数。若 $f(x) \equiv 0$，称为齐次线性方程；否则称为非齐次线性方程。

2.3.1 齐次情形

齐次方程

$$y' + p(x)y = 0$$

可分离变量:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -p(x)\,\mathrm{d}x.$$

故

$$\ln|y| = -\int p(x)\,\mathrm{d}x + \ln|C|, \qquad C \neq 0.$$

把 $C = 0$ 合并进去，齐次通解为

$$y = C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{2.7}$$

2.3.2 非齐次情形与积分因子

对非齐次方程(2.6)，取积分因子

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{2.8}$$

两边同乘 $\mu(x)$，得

$$\mu y' + \mu p y = \mu f, \tag{2.9}$$
$$(\mu y)' = \mu f. \tag{2.10}$$

故

$$\mu(x) y = \int \mu(x) f(x)\,\mathrm{d}x + C, \tag{2.11}$$

即

$$y = \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} \left[\int f(x) \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C \right]. \tag{2.12}$$

若给定初值 $y(x_0) = y_0$，则更稳妥的定积分形式为

$$y(x) = \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s} \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi) \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{\xi} p(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}\xi \right]. \tag{2.13}$$

一阶线性方程的结构

公式(2.12) 可以看成

$$\text{通解} = \text{非齐次方程的一个特解} + \text{齐次方程通解}.$$

这正是高阶线性微分方程中“齐次通解加一个特解”结构的雏形。

2.4 伯努利方程

定义 2.4 (伯努利方程)**.** 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x) y = f(x) y^n, \qquad n \neq 0, 1, \tag{2.14}$$

的方程称为伯努利方程。

在 $y \neq 0$ 的区间上，两边同乘 y^{-n}，得到

$$y^{-n} y' + p(x) y^{1-n} = f(x). \tag{2.15}$$

令

$$z = y^{1-n}, \tag{2.16}$$

则

$$z' = (1-n) y^{-n} y'. \tag{2.17}$$

于是伯努利方程化为一阶线性方程

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)f(x). \tag{2.18}$$

求出 z 后，再由 $z = y^{1-n}$ 回代求 y。

注 2.2. 当 $n > 0$ 且 y^n 在 $y = 0$ 处有意义时，$y \equiv 0$ 是(2.14) 的一个解。由于代换 $z = y^{1-n}$ 排除了 $y = 0$，求解后应把该解单独补入。

第 3 节 全微分方程与积分因子

3.1 全微分方程

定义 3.1 (全微分方程). 设 $M(x, y), N(x, y)$ 在区域 $G \subset \mathbb{R}^2$ 内连续。若存在二元函数 $u(x, y)$，使得

$$\mathrm{d}u = M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y, \tag{3.1}$$

则方程

$$M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{3.2}$$

称为全微分方程，其通解为

$$u(x, y) = C. \tag{3.3}$$

此时 u 称为方程的势函数或原函数。

定理 3.1 (全微分判别法). 若 M, N 在单连通区域 G 内具有连续一阶偏导数，则方程(3.2) 是全微分方程的充要条件为

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \qquad (x, y) \in G. \tag{3.4}$$

注 3.1. “单连通”是全局势函数存在的自然条件。如果区域有洞，条件(3.4) 仍可给出局部势函数，但不一定保证整个区域上存在单值的全局势函数。

3.2 势函数的求法

若方程为全微分方程，可以用两种常用方式求势函数。

方法一：沿折线路径积分

任选基点 (x_0, y_0)，令

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi, y_0)\,\mathrm{d}\xi + \int_{y_0}^{y} N(x, \eta)\,\mathrm{d}\eta. \tag{3.5}$$

若 $M_y = N_x$，则路径无关；上式给出一个势函数。

方法二：先对 x 积分

由 $u_x = M$ 得

$$u(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x + \phi(y), \tag{3.6}$$

其中 y 视为常数。再利用 $u_y = N$ 求出 $\phi'(y)$，积分得 $\phi(y)$。也可先对 y 积分再补 $\psi(x)$。

常用微分恒等式如下：

$$y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}(xy), \tag{3.7}$$

$$\frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right), \tag{3.8}$$

$$\frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \mathrm{d}\left(\arctan\frac{y}{x}\right), \tag{3.9}$$

$$\frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2-y^2} = \mathrm{d}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\right]. \tag{3.10}$$

例 3.1. 求解

$$\left(\cos x + \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y = 0. \tag{3.11}$$

这里

$$M = \cos x + \frac{1}{y}, \qquad N = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}.$$

计算得

$$M_y = -\frac{1}{y^2}, \qquad N_x = -\frac{1}{y^2},$$

故方程是全微分方程。由恒等式

$$\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin x), \quad \frac{1}{y}\,\mathrm{d}x - \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right), \quad \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}(\ln|y|),$$

得到通解

$$\sin x + \frac{x}{y} + \ln|y| = C. \tag{3.12}$$

3.3 积分因子

定义 3.2 (积分因子). 若方程

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

本身不是全微分方程，但存在非零函数 $\mu(x,y)$，使得

$$\mu M\,\mathrm{d}x + \mu N\,\mathrm{d}y = 0 \tag{3.13}$$

成为全微分方程，则称 μ 为该方程的积分因子。

积分因子的一般条件为

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}. \tag{3.14}$$

展开得

$$M\mu_y+\mu M_y=N\mu_x+\mu N_x. \tag{3.15}$$

这是关于 μ 的一阶偏微分方程，一般难以直接求解。因此通常先尝试 μ 只依赖于一个变量的情形。

定理 3.2 (只依赖于 x 的积分因子). 若

$$\frac{M_y-N_x}{N}=\phi(x) \tag{3.16}$$

只与 x 有关，则

$$\mu(x)=\mathrm{e}^{\int \phi(x)\,\mathrm{d}x} \tag{3.17}$$

是一个积分因子。

证明. 若 $\mu=\mu(x)$，则 $\mu_y=0$，条件(3.14) 变为

$$\mu M_y=N\mu'+\mu N_x.$$

于是

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{M_y-N_x}{N}=\phi(x),$$

积分即得(3.17)。 □

推论 3.1 (只依赖于 y 的积分因子). 若

$$\frac{N_x-M_y}{M}=\psi(y) \tag{3.18}$$

只与 y 有关，则

$$\mu(y)=\mathrm{e}^{\int \psi(y)\,\mathrm{d}y} \tag{3.19}$$

是一个积分因子。

例 3.2. 求解

$$\left(3y+\frac{y^2}{x}\right)\mathrm{d}x+(x+y)\,\mathrm{d}y=0,\qquad x\neq 0. \tag{3.20}$$

此时

$$M=3y+\frac{y^2}{x},\qquad N=x+y.$$

有

$$M_y=3+\frac{2y}{x},\qquad N_x=1.$$

故

$$\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{2+2y/x}{x+y}=\frac{2}{x}, \tag{3.21}$$

只与 x 有关。因此可取积分因子

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int 2/x \,\mathrm{d}x} = x^2. \tag{3.22}$$

乘以 x^2 后方程化为

$$(3x^2y + xy^2)\,\mathrm{d}x + (x^3 + x^2y)\,\mathrm{d}y = 0. \tag{3.23}$$

势函数满足

$$u_x = 3x^2y + xy^2, \tag{3.24}$$

$$u = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + \phi(y). \tag{3.25}$$

再由

$$u_y = x^3 + x^2y + \phi'(y) = x^3 + x^2y$$

得 $\phi'(y) = 0$。故通解为

$$x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = C. \tag{3.26}$$

第 4 节 可降阶的高阶微分方程

可降阶方程的基本思想是：根据方程中缺少的变量或导数，选取合适代换，把高阶方程降为低阶方程。典型二阶方程为

$$F(x, y, y', y'') = 0. \tag{4.1}$$

4.1 右端只含自变量

若

$$y'' = f(x), \tag{4.2}$$

则直接积分两次：

$$y' = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1, \qquad y = \int \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}x + C_1x + C_2. \tag{4.3}$$

更一般地，若

$$y^{(n)} = f(x), \tag{4.4}$$

则连续积分 n 次即可得到通解。

4.2 方程不显含 y

若

$$y'' = f(x, y'), \tag{4.5}$$

令

$$p = y'. \tag{4.6}$$

则

$$y'' = p' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \tag{4.7}$$

方程(4.5) 降为一阶方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = f(x,p). \tag{4.8}$$

若求得 $p = p(x, C_1)$，则再积分得到

$$y = \int p(x, C_1)\,\mathrm{d}x + C_2. \tag{4.9}$$

4.3 方程不显含 x

若

$$y'' = f(y, y'), \tag{4.10}$$

令

$$p = y'. \tag{4.11}$$

此时把 p 看成 y 的函数，则

$$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}. \tag{4.12}$$

于是(4.10) 降为

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y,p). \tag{4.13}$$

求得 $p = p(y, C_1)$ 后，由

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(y, C_1) \tag{4.14}$$

再作一次分离变量积分，得到 $y = y(x, C_1, C_2)$。

降阶记忆

不显含 y：令 $p = y'$，把二阶方程降为 $p(x)$ 的一阶方程。
不显含 x：令 $p = y'$，但把 p 看成 y 的函数，使用 $y'' = p\,\mathrm{d}p/\,\mathrm{d}y$。

第 5 节 线性微分方程的一般理论

5.1 线性微分算子与初值问题

定义 5.1 (n 阶线性微分方程)**.** 形如

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + p_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p_n(x)y = f(x) \tag{5.1}$$

的方程称为 n 阶线性微分方程。若 $f(x) \equiv 0$，称为齐次线性方程；若 $f(x) \not\equiv 0$，称为非齐次线性方程。

定义线性微分算子

$$\mathcal{L}[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y. \tag{5.2}$$

则方程(5.1) 可写为

$$\mathcal{L}[y] = f(x). \tag{5.3}$$

命题 5.1 (线性性). 对任意常数 α, β 和足够光滑函数 u, v，有

$$\mathcal{L}[\alpha u + \beta v] = \alpha\mathcal{L}[u] + \beta\mathcal{L}[v]. \tag{5.4}$$

定理 5.1 (线性方程初值问题). 设 $p_1, p_2, \ldots, p_n, f$ 在区间 (a, b) 内连续，且 $x_0 \in (a, b)$。则初值问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}[y] = f(x), \\ y^{(i)}(x_0) = y_i^0, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases} \tag{5.5}$$

在 (a, b) 内存在唯一解。

5.2 齐次线性方程与基本解组

考虑齐次方程

$$\mathcal{L}[y] = 0. \tag{5.6}$$

定理 5.2 (齐次解空间). 方程(5.6) 在区间 (a, b) 上的解集构成一个 n 维线性空间。因此，若 $y_1, \ldots, y_n$ 是该空间的一组基，则齐次通解为

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n. \tag{5.7}$$

定义 5.2 (线性相关与线性无关). 函数组 $y_1, \ldots, y_m$ 在区间 I 上称为线性相关，若存在不全为零的常数 $c_1, \ldots, c_m$，使

$$c_1y_1(x) + \cdots + c_my_m(x) \equiv 0, \qquad x \in I. \tag{5.8}$$

否则称为线性无关。

定义 5.3 (朗斯基行列式). 设函数 $y_1, \ldots, y_m$ 具有至多 $m-1$ 阶导数，称

$$W(y_1, \ldots, y_m)(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_m(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_m'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(m-1)}(x) & y_2^{(m-1)}(x) & \cdots & y_m^{(m-1)}(x) \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

为它们的朗斯基行列式，简称 Wronskian。

定理 5.3 (基本解组判别). 设 $y_1, \ldots, y_n$ 是齐次线性方程(5.6) 的 n 个解。它们构成基本解组的充要条件是存在 $x_0 \in (a, b)$ 使

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) \neq 0. \tag{5.10}$$

此时 $W(y_1, \ldots, y_n)(x)$ 在整个区间内处处不为零。

注 5.1. 对任意函数组而言，$W \equiv 0$ 不一定推出线性相关；但对同一个线性齐次方程的解组，朗斯基行列式的上述判别成立。原稿中“$W = 0$ 等价于线性相关”的表述应理解为在线性齐次方程解组这一语境下成立。

定理 5.4 (Abel 公式). 对齐次方程

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0,$$

任意 n 个解 $y_1, \ldots, y_n$ 的 *Wronskian* 满足

$$W'(x) = -p_1(x)W(x). \tag{5.11}$$

因此

$$W(x) = W(x_0) \exp\left[-\int_{x_0}^{x} p_1(s)\,\mathrm{d}s\right]. \tag{5.12}$$

5.3 非齐次线性方程的解结构

考虑非齐次方程

$$\mathcal{L}[y] = f(x). \tag{5.13}$$

定理 5.5 (非齐次方程的通解结构). 设 $y^*(x)$ 是(5.13) 的一个特解，$Y(x)$ 是对应齐次方程 $\mathcal{L}[Y] = 0$ 的通解，则(5.13) 的通解为

$$y = Y + y^*. \tag{5.14}$$

证明. 若 $\mathcal{L}[y^*] = f$，且 $\mathcal{L}[Y] = 0$，则

$$\mathcal{L}[Y + y^*] = \mathcal{L}[Y] + \mathcal{L}[y^*] = f.$$

反之，若 y 是任意一个非齐次解，则

$$\mathcal{L}[y - y^*] = \mathcal{L}[y] - \mathcal{L}[y^*] = 0,$$

故 $y - y^*$ 属于齐次解空间。 □

定理 5.6 (叠加原理). 若

$$\mathcal{L}[y_1] = f_1(x), \qquad \mathcal{L}[y_2] = f_2(x),$$

则

$$\mathcal{L}[y_1 + y_2] = f_1(x) + f_2(x). \tag{5.15}$$

更一般地，

$$\mathcal{L}\left[\sum_{j=1}^{m} c_j y_j\right] = \sum_{j=1}^{m} c_j \mathcal{L}[y_j].$$

推论 5.1 (复解的实部与虚部). 若线性方程的系数均为实函数，且复值函数

$$y = u(x) + \mathrm{i}v(x)$$

满足

$$\mathcal{L}[y] = U(x) + \mathrm{i}V(x),$$

则

$$\mathcal{L}[u] = U, \qquad \mathcal{L}[v] = V. \tag{5.16}$$

特别地，若 $\mathcal{L}[y] = 0$，则 u 与 v 都是实值齐次解。

第 6 节 常系数线性微分方程

6.1 二阶常系数齐次线性方程

考虑

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{6.1}$$

其中 p, q 为常数。试取指数型解 $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$，代入得到

$$(\lambda^2 + p\lambda + q)\mathrm{e}^{\lambda x} = 0. \tag{6.2}$$

于是特征方程为

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{6.3}$$

定理 6.1 (二阶常系数齐次方程通解). 设特征方程(6.3) 的根为 λ_1, λ_2。

(1) 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 且均为实根，则

$$y = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}. \tag{6.4}$$

(2) 若 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 是二重实根，则

$$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{\lambda x}. \tag{6.5}$$

(3) 若 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$，其中 $\beta > 0$，则

$$y = \mathrm{e}^{\alpha x}\big(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\big). \tag{6.6}$$

二重根公式可用降阶推出。若 $y_1 = \mathrm{e}^{\lambda x}$，令 $y = u\mathrm{e}^{\lambda x}$，代入(6.1) 后得到

$$y' = (u' + \lambda u)\mathrm{e}^{\lambda x}, \tag{6.7}$$

$$y'' = (u'' + 2\lambda u' + \lambda^2 u)\mathrm{e}^{\lambda x}. \tag{6.8}$$

因此

$$\big[u'' + (2\lambda + p)u' + (\lambda^2 + p\lambda + q)u\big]\mathrm{e}^{\lambda x} = 0. \tag{6.9}$$

若 λ 是二重根，则

$$\lambda^2+p\lambda+q=0,\qquad 2\lambda+p=0,$$

从而 $u''=0$，即 $u=C_1+C_2x$。

若特征根为 $\alpha\pm\mathrm{i}\beta$，复解为

$$\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x},\qquad \mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)x}. \tag{6.10}$$

由 Euler 公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta \tag{6.11}$$

可取其实部与虚部，得到两个实解

$$\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,\qquad \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{6.12}$$

复根情形的通解也可以写成相位形式。令

$$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2},\qquad \frac{C_1}{A}=\sin\varphi,\qquad \frac{C_2}{A}=\cos\varphi,$$

则

$$\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)=A\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x+\varphi). \tag{6.13}$$

特征根类型	**通解形式**
两个不相等实根 $\lambda_1\neq\lambda_2$	$y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$
二重实根 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$	$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{\lambda x}$
共轭复根 $\alpha\pm\mathrm{i}\beta$	$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

6.2 n 阶常系数齐次线性方程

考虑

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0, \tag{6.14}$$

其中 $p_1,\ldots,p_n$ 为常数。其特征方程为

$$D(\lambda)=\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_{n-1}\lambda+p_n=0. \tag{6.15}$$

定理 6.2 (n 阶常系数齐次方程通解)**.** 设特征方程(6.15) 的互异复根为 $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$，重数分别为 $n_1,\ldots,n_s$，且

$$n_1+\cdots+n_s=n.$$

则在复数范围内，通解可写为

$$y=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{n_i-1}C_{ij}x^j\mathrm{e}^{\lambda_i x}. \tag{6.16}$$

若系数为实数，则每一对共轭复根 $\alpha\pm\mathrm{i}\beta$ 的复解应改写成实解

$$x^j\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,\qquad x^j\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x,\quad j=0,1,\ldots,k-1, \tag{6.17}$$

其中 k 是复根 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 的重数。

特征根	**对应基本解**
单重实根 λ	$\mathrm{e}^{\lambda x}$
k 重实根 λ	$\mathrm{e}^{\lambda x}, x\mathrm{e}^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda x}$
单重复根 $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$	$\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,\ \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$
k 重复根 $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$	$x^j\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^j\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x,\ j=0,\dots,k-1$

6.3 二阶常系数非齐次方程与待定系数法

考虑

$$y''+py'+qy=f(x). \tag{6.18}$$

先求对应齐次方程的通解 Y，再求非齐次方程的一个特解 y^*，则通解为

$$y=Y+y^*. \tag{6.19}$$

待定系数法适用于 $f(x)$ 为多项式、指数函数、三角函数及其有限线性组合的情形。本质上是利用这些函数族在微分运算下封闭。

6.3.1 右端为 $P_m(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$

设

$$f(x)=P_m(x)\mathrm{e}^{\alpha x}, \tag{6.20}$$

其中 $P_m(x)$ 是 m 次多项式。令

$$y^*=Q(x)\mathrm{e}^{\alpha x}. \tag{6.21}$$

因为

$$(Q\mathrm{e}^{\alpha x})'=(Q'+\alpha Q)\mathrm{e}^{\alpha x}, \tag{6.22}$$

$$(Q\mathrm{e}^{\alpha x})''=(Q''+2\alpha Q'+\alpha^2 Q)\mathrm{e}^{\alpha x}, \tag{6.23}$$

代入(6.18) 得

$$Q''+(2\alpha+p)Q'+(\alpha^2+p\alpha+q)Q=P_m(x). \tag{6.24}$$

于是可按 α 与特征根的关系决定试探形式:

$$y^*=x^kR_m(x)\mathrm{e}^{\alpha x}, \tag{6.25}$$

其中 $R_m(x)$ 是 m 次待定多项式，而

$$k=\begin{cases}0, & \alpha\ \text{不是特征根},\\ 1, & \alpha\ \text{是单重特征根},\\ 2, & \alpha\ \text{是二重特征根}.\end{cases} \tag{6.26}$$

注 6.1. 若 α 是二重特征根，方程(6.24) 中 Q 与 Q' 的系数会同时消失，必须乘以 x^2 才能避免与齐次解重复。

6.3.2 右端含三角函数

若

$$f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\big(P_m(x)\cos\beta x+Q_l(x)\sin\beta x\big),\qquad \beta>0, \tag{6.27}$$

则把三角函数看作复指数的实部或虚部：

$$\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x=\operatorname{Re}\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x},\qquad \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x=\operatorname{Im}\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}. \tag{6.28}$$

因此试探特解可写为

$$y^*=x^k\mathrm{e}^{\alpha x}\big(R_s(x)\cos\beta x+S_s(x)\sin\beta x\big), \tag{6.29}$$

其中

$$s=\max\{m,l\},$$

R_s,S_s 为 s 次待定多项式；k 等于复数 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 作为特征根的重数。对于二阶方程，k 通常为 0 或 1；若在更高阶方程中出现重根，则可为更大的整数。

6.4 高阶常系数非齐次方程

对高阶常系数非齐次方程

$$\mathcal{L}[y]=f(x), \tag{6.30}$$

待定系数法的规则与二阶情形完全一致，只是 k 应取为对应特征根的重数。

定理 6.3 (待定系数法的试探形式)**.** 设 $\mathcal{L}$ 为常系数线性微分算子。

(1) 若

$$f(x)=P_m(x)\mathrm{e}^{\alpha x},$$

且 α 是特征方程的 k 重根（不是特征根时 $k=0$），则取

$$y^*=x^kR_m(x)\mathrm{e}^{\alpha x}. \tag{6.31}$$

(2) 若

$$f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\big(P_m(x)\cos\beta x+Q_l(x)\sin\beta x\big),$$

且 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 是特征方程的 k 重根（不是特征根时 $k=0$），令 $s=\max\{m,l\}$，取

$$y^*=x^k\mathrm{e}^{\alpha x}\big(R_s(x)\cos\beta x+S_s(x)\sin\beta x\big). \tag{6.32}$$

待定系数法的判断口诀

先看右端类型，再写同型试探；若试探项与齐次解重复，就乘以足够高次的 x，直到不再重复。乘上的 x^k 中，k 正是相应特征根的重数。

第 7 节 一般线性方程的若干解法

7.1 欧拉方程

定义 7.1 (欧拉方程). 形如

$$a_0x^n\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}+a_1x^{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_ny=f(x), \tag{7.1}$$

其中 $a_0\neq 0$，且 $a_0,\ldots,a_n$ 为常数的方程称为欧拉方程，也称 Cauchy–Euler 方程。

在 $x>0$ 上令

$$x=\mathrm{e}^t,\qquad t=\ln x,\qquad Y(t)=y(\mathrm{e}^t). \tag{7.2}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}, \tag{7.3}$$

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=Y', \tag{7.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{x^2}\left(Y''-Y'\right), \tag{7.5}$$

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=Y''-Y'. \tag{7.6}$$

由此，欧拉方程可转化为关于 t 的常系数线性方程。

例 7.1 (二阶欧拉方程). 设

$$x^2y''+axy'+by=f(x),\qquad x>0. \tag{7.7}$$

作 $x=\mathrm{e}^t$ 后，有

$$(Y''-Y')+aY'+bY=f(\mathrm{e}^t), \tag{7.8}$$

即

$$Y''+(a-1)Y'+bY=f(\mathrm{e}^t). \tag{7.9}$$

这是常系数非齐次线性方程。

齐次欧拉方程也可直接试取 $y=x^r$。以二阶为例，代入

$$x^2y''+axy'+by=0$$

得到

$$r(r-1)+ar+b=0. \tag{7.10}$$

这称为指标方程。若根为不同实根、重根或共轭复根，则分别得到与常系数方程相似的通解；复根 $r=\alpha\pm\mathrm{i}\beta$ 对应

$$x^\alpha\cos(\beta\ln x),\qquad x^\alpha\sin(\beta\ln x). \tag{7.11}$$

7.2 已知一个解时的降阶法

考虑二阶齐次线性方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{7.12}$$

设已知一个非零解 $y_1(x)$，为了求另一个线性无关解，令

$$y = u(x)y_1(x). \tag{7.13}$$

代入并整理。由于 y_1 本身满足原方程，含 u 的项消失，得到

$$u''y_1 + u'(2y_1' + py_1) = 0. \tag{7.14}$$

令 $z = u'$，则

$$z'y_1 + (2y_1' + py_1)z = 0. \tag{7.15}$$

这是关于 z 的一阶线性齐次方程。解得

$$z = C\frac{\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}}{y_1^2}. \tag{7.16}$$

因此可取第二个解为

$$y_2 = y_1 \int \frac{\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}}{y_1^2}\,\mathrm{d}x. \tag{7.17}$$

降阶法结论

若 y_1 是 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的一个非零解，则

$$y_2 = y_1 \int \frac{\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}}{y_1^2}\,\mathrm{d}x$$

给出与 y_1 线性无关的另一个解。于是齐次通解为

$$y = C_1y_1 + C_2y_2.$$

7.3 二阶非齐次方程的参数变易法

考虑标准非齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{7.18}$$

设对应齐次方程有基本解组 y_1, y_2，其 Wronskian

$$W = y_1y_2' - y_1'y_2 \neq 0. \tag{7.19}$$

参数变易法将齐次通解中的常数改为函数：

$$y^* = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x). \tag{7.20}$$

为简化计算，附加条件

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0. \tag{7.21}$$

于是

$$(y^*)' = u_1y_1' + u_2y_2', \tag{7.22}$$
$$(y^*)'' = u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2''. \tag{7.23}$$

代入(7.18) 并利用 y_1, y_2 是齐次解，得到第二个条件

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x). \tag{7.24}$$

由(7.21) 与(7.24) 解得

$$u_1' = -\frac{y_2 f}{W}, \qquad u_2' = \frac{y_1 f}{W}. \tag{7.25}$$

因此可取一个特解为

$$y^* = -y_1 \int \frac{y_2 f}{W}\,\mathrm{d}x + y_2 \int \frac{y_1 f}{W}\,\mathrm{d}x. \tag{7.26}$$

非齐次方程的通解为

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 - y_1 \int \frac{y_2 f}{W}\,\mathrm{d}x + y_2 \int \frac{y_1 f}{W}\,\mathrm{d}x. \tag{7.27}$$

注 7.1. 公式(7.26) 适用于标准形式 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$。若原方程为

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x),$$

应先除以 $a_2(x)$，把右端改成 $f(x) = g(x)/a_2(x)$。

第 8 节 微分方程组

8.1 一阶微分方程组

定义 8.1 (一阶微分方程组). 形如

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{8.1}$$

的系统称为一阶微分方程组。

若

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + g_i(t), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{8.2}$$

则称为一阶线性微分方程组。记

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}. \tag{8.3}$$

则可写成矩阵形式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(t). \tag{8.4}$$

若 $\boldsymbol{g}(t) \equiv \mathbf{0}$，则称为齐次线性系统。

8.2 高阶标量方程化为一阶系统

考虑

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = f(t). \tag{8.5}$$

令

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad \ldots, \quad x_n = y^{(n-1)}. \tag{8.6}$$

则

$$x_1' = x_2, \tag{8.7}$$
$$x_2' = x_3, \tag{8.8}$$
$$\vdots \tag{8.9}$$
$$x_{n-1}' = x_n, \tag{8.10}$$
$$x_n' = -p_n(t)x_1 - p_{n-1}(t)x_2 - \cdots - p_1(t)x_n + f(t). \tag{8.11}$$

因此(8.5) 等价于一阶线性系统

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -p_n & -p_{n-1} & -p_{n-2} & \cdots & -p_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}. \tag{8.12}$$

统一观点

任意 n 阶标量微分方程在引入 n 个状态变量后，都可以化为一阶微分方程组。线性高阶方程对应线性一阶系统；常系数高阶方程对应常系数矩阵系统。

8.3 常系数齐次线性系统的特征值法

考虑常系数齐次系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{x}. \tag{8.13}$$

仿照标量常系数方程，试取

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}\mathrm{e}^{\lambda t}, \qquad \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}. \tag{8.14}$$

代入(8.13) 得

$$\lambda\boldsymbol{v}\mathrm{e}^{\lambda t} = A\boldsymbol{v}\mathrm{e}^{\lambda t}, \tag{8.15}$$

即

$$(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}. \tag{8.16}$$

要有非零解 $\boldsymbol{v}$，必须

$$\det(\lambda I - A) = 0. \tag{8.17}$$

这就是矩阵系统的特征方程。

定理 8.1 (可对角化情形的通解). 若矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$，对应特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$，则系统(8.13) 的通解为

$$\boldsymbol{x}(t) = C_1 \boldsymbol{v}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \cdots + C_n \boldsymbol{v}_n \mathrm{e}^{\lambda_n t}. \tag{8.18}$$

注 8.1. 若存在重特征值且特征向量不足, 则需要引入广义特征向量, 解中会出现 $t\mathrm{e}^{\lambda t}, t^2\mathrm{e}^{\lambda t}$ 等项；这与常系数标量方程中重根对应 $x^j\mathrm{e}^{\lambda x}$ 的现象完全一致。

总复习表

类型	标准形式	核心方法
可分离变量	$y' = \varphi(x)\psi(y)$	分离为 $\mathrm{d}y/\psi(y) = \varphi(x)\,\mathrm{d}x$，并补查 $\psi(y) = 0$。
齐次方程	$y' = g(y/x)$	令 $u = y/x$，化为 $u' = \big(g(u) - u\big)/x$。
一阶线性	$y' + p(x)y = f(x)$	积分因子 $\mu = \mathrm{e}^{\int p}$，通解公式(2.12)。
伯努利方程	$y' + p(x)y = f(x)y^n$	令 $z = y^{1-n}$，化为一阶线性方程。
全微分方程	$M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = 0$	判别 $M_y = N_x$，求势函数 $u = C$。
积分因子	$M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = 0$ 非全微分	若 $(M_y - N_x)/N = \phi(x)$，取 $\mu = \mathrm{e}^{\int \phi}$；若 $(N_x - M_y)/M = \psi(y)$，取 $\mu = \mathrm{e}^{\int \psi}$。
常系数齐次	$L(D)y = 0$	解特征方程；重根乘 x^j，复根取实部和虚部。
常系数非齐次	$L(D)y = f(x)$	齐次通解加特解；对简单右端可用待定系数法。
欧拉方程	$a_0x^ny^{(n)} + \cdots + a_ny = f(x)$	令 $x = \mathrm{e}^t$ 化为常系数方程，或齐次时试取 $y = x^r$。
参数变易法	$y'' + py' + qy = f$	用基本解组 y_1, y_2 构造 y^*，公式见(7.26)。

类型	标准形式	核心方法
微分方程组	$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(t)$	统一矩阵形式；常系数齐次系统用特征值法。

参考资料

参考文献

[1] OpenStax, *Calculus Volume 2*, Section 4.5 First-order Linear Equations.

[2] LibreTexts, *A First Course in Differential Equations for Scientists and Engineers*, Section 1.2 First Order Differential Equations.

[3] MIT OpenCourseWare, *18.03 Differential Equations Supplementary Notes*, Chapter 15 The Wronskian.

[4] Paul Dawkins, *Paul's Online Notes: Differential Equations*, sections on complex roots, repeated roots, and undetermined coefficients.

[5] MIT OpenCourseWare, *18.034 Honors Differential Equations*, Lecture 12, Euler-Cauchy equation.