Ⅰ 初等积分法

1、基本概念

(1) 微分方程　　联系自变量、因变量及其微分的方程

(2) 常微分方程　　未知函数为一元函数

(3) 偏微分方程　　未知函数为多元函数

(4) 微分方程的形式

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=F(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n})=0$$

(5) 微分方程的阶　　最高阶导数的阶数

(6) 微分方程的解

$y=y(x)$，$x\in I$，满足：$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})\equiv0$

$\Rightarrow$ $y=y(x)$ 是方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 的解

- 通解　$y=y(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$
- 特解　初值条件

2. 可分离变量的方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)\Rightarrow\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C$$

特点：① 已解出一阶导数

② 等号右端是 x,y 一元函数之积

※注意：① 当 $g(y)\neq0$ 时　两边分离变量 & 求不定积分

② 当 $g(y)=0$ 时　满足 $g(y_0)=0$ 也是方程的解

③ 齐次方程可用 $y=tx$ or $x=uy$ 的替换化为可分离变量的方程

3. 一阶线性微分方程

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x) \Rightarrow y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$$

解法：① 先解一阶齐次线性微分方程

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-p(x)y \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int -p(x)dx+C$$

$$\Rightarrow y=Ce^{-\int p(x)dx}$$

② 再解一阶非济次线性微分分程

设解为 $y=u(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}=q(x)\cdot e^{\int p(x)dx} \Rightarrow u(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C$$

综上①②. $y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$

※ 注意：伯努利方程可用变量替换法转化为一阶线性微分方程

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)y^n \quad (n\neq 0 \text{ 且 } n\neq 1)$$

取 $z=y^{1-n}$ 得 $\frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)f(x)$

4. 全微分方程

$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ (#)

若 $u(x,y)$ 满足：$du(x,y)=M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy$

则称 $u(x,y)=C$ 为原方程的函数 (#) 即为全微分方程

※ $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ 是全微分方程 $\Leftrightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$

① 法Ⅰ 曲线积分

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy$$

$$=\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y} N(x,y)\,dy$$

② 法Ⅱ 不定积分　(假设 y 为常数)

$$u(x,y)=\int M(x,y)\,dx+\varphi(y) \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx+\varphi'(y)=N(x,y)$$

$$\Rightarrow \varphi'(y)=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx$$

将 $\varphi(y)$ 代入 $(*)$ 即得.

③ 法Ⅲ. 凑微分法

1. $y\,dx+x\,dy=d(xy)$

2. $\dfrac{y\,dx-x\,dy}{y^2}=d\left(\dfrac{x}{y}\right)$

3. $\dfrac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}=d\left(\arctan\dfrac{y}{x}\right)$　　$\dfrac{y\,dx-x\,dy}{x^2-y^2}=d\left(\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-y}{x+y}\right|\right)$

※ 方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 不是全微分方程.

即：$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

此时假设 $\exists u(x,y)$，使方程 $u(x,y)M(x,y)dx+u(x,y)N(x,y)dy=0$ 是全微分方程.

即有：$\frac{\partial uM}{\partial y}=\frac{\partial uN}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial y}M+\frac{\partial M}{\partial y}\cdot u=\frac{\partial u}{\partial x}N+\frac{\partial N}{\partial x}\cdot u$

编微分方程难度太大，考虑 $u(x,y)=u(x)$ 或 $u(y)$

① 假设 $u=u(x,y)$

则有：$\frac{du}{dx}N+\frac{\partial N}{\partial x}u(x)=\frac{\partial M}{\partial y}u(x) \Rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$

$\Rightarrow u(x)=e^{\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx}=e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx}$

代入求解全微分方程.

② 假设 $u=u(y)$

则有：$\frac{u'(y)}{u(y)}=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$

同①可得 $u(y)$

Ⅱ 高阶线性微分方程

1. 基本概念

$$\frac{d^n y}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+p_n(x)y=f(x) \quad (\#)$$

(1) (#)中 $f(x)\not\equiv 0$，则称(#)为n阶非齐次线性方程

(2) (#)中 $f(x)\equiv 0$，则称(#)为n阶齐次线性方程.

(3) 高阶线性微分方程的算子

$$L=\frac{d^n}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}(x)\frac{d}{dx}+p_n(x)$$

※ L运算具有双线性

$$L[c_1y_1+c_2y_2]=c_1L[y_1]+c_2L[y_2]$$

(4) 朗斯基行列式

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_m(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_m'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(m-1)}(x) & y_2^{(m-1)}(x) & \cdots & y_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}$$

其中m个函数 $y_1(x), y_2(x)\cdots, y_m(x)$ 均有 $m-1$ 个阶导数

※ $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_m(x)$ 在 (a,b) 内线性相关 $\Leftrightarrow W(x)\equiv 0$

※ 若 $y_1(x), y_2(x), \cdots y_m(x)$ 是齐次线性方程组的m个解

则 $W(x)$ 在 (a,b) 上或处处不为0. 或 $\equiv 0$.

(5) 线性微分方程解的性质

① 若 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是(#)的n个线性无关的解

则有通解 $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)$

② $L[y_1]=f_1(x)$，$L[y_2]=f_2(x) \Rightarrow L[y_1+y_2]=f_1(x)+f_2(x)$

2. 可降阶的二阶微分方程

(1) 不含未知数 x, y

$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x) \Rightarrow$ double int.

(2) 不显含 y

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \xRightarrow{p=\frac{dy}{dx}} \frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

(3) 不显含 x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) \xRightarrow{p=\frac{dy}{dx}} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{p\,dp}{dx} = f(y, p)$$

3. 高阶常系数齐次线性微分方程

$$L[y]=\frac{d^ny}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}\frac{dy}{dx}+p_ny=0 \quad (\#)$$

$$D(\lambda)=\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_{n-1}\lambda+p_n=0 \quad (*)$$

※ 下面取 $n=2$ 为例. $D(\lambda)=a\lambda^2+b\lambda+c$

(1) $\Delta=b^2-4ac>0$ 即 $D(\lambda)=0$ 有两相异实根 λ_1, λ_2.

$\Rightarrow$ 通解 $Y=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x}$

(2) $\Delta=b^2-4ac=0$ 即 $D(\lambda)=0$ 有两相同实根 $\lambda_1=\lambda_2\triangleq\lambda$

$\Rightarrow$ 通解 $Y=(c_1+c_2x)e^{\lambda x}$

(3) $\Delta=b^2-4ac<0$ 即 $D(\lambda)=0$ 有一对虚根 λ_1, λ_2.

$$\begin{cases}\lambda_1=z=a+bi\\ \lambda_2=\bar{z}=a-bi\end{cases} \Rightarrow Y=c_1e^{(a+bi)x}+c_2e^{(a-bi)x}$$

$\Leftrightarrow Y=e^{ax}(c_1\cos bx+c_2\sin bx)$

※ $n\neq2$ 时. 且有 k 重根

① $\lambda\in R$ $\quad y=(c_1+c_2x+\cdots+c_kx^{k-1})e^{\lambda x}$

② $\lambda\in C$ $\quad y=(c_1+c_2x+\cdots+c_kx^{k-1})e^{(\alpha+\beta i)x}$

$$=e^{\alpha x}[(a_1+a_2x+\cdots+a_kx^{k-1})\cos\beta x+(b_1+\cdots+b_kx^{k-1})\sin\beta x]$$

4. 高阶常系数非齐次线性微分方程

$L[y]=f(x)$

○ 常数变易法 多做些题

5. 二阶变系数齐次线性微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0$$

(1) 已知一个非零解 y

- Liouville $\quad y=y_1\left[C_1+C_2\int\frac{1}{y_1^2}\cdot e^{-\int p(x)dx}dx\right]$

(2) $2p'+p^2-4q=A$

$$\begin{cases} y=u\cdot e^{-\int\frac{p}{2}dx} \\ u''-\frac{1}{4}Au=0 \end{cases}$$

6. 二阶变系数非齐次线性微分方程

(1) 欧拉方程

$$a_0x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=f(x)$$

当 $x>0$ 时，令 $x=e^t$. $t=\ln x$.

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{x^3}\left[\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}\right]$$

记 $x^n\frac{d^ny}{dx^n}\triangleq E_n\left(\frac{d^ny}{dx^n},\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},\cdots,\frac{dy}{dx}\right)$

$$E_n=\frac{d}{dt}E_{n-1}-(n-1)E_{n-1}$$

(2) 常数变易法

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) & (\#) \\ y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 & (*) \end{cases}$$

(*) 通解为 $Y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$

常数变易 设特解为 $y = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$

$\Rightarrow y' = [u_1y_1'(x) + u_2y_2'(x)] + [u_1'y_1(x) + u_2'y_2(x)]$

令 $u_1y_1'(x) + u_2y_2'(x) = 0$ ①

则 $y' = u_1'y_1(x) + u_2'y_2(x)$ ②

$\Rightarrow y'' = [u_1y_1''(x) + u_2y_2''(x)] + [u_1'y_1'(x) + u_2'y_2'(x)]$ ③

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x) = f(x) & ④ \\ y_1'' + p(x)y_1' + q(x) \equiv 0 & ⑤ \\ y_2'' + p(x)y_2' + q(x) \equiv 0 & ⑥ \end{cases}$$

联立 ②③④⑤⑥

$f(x) = y'' + p(x)y' + q(x) = u_1'y_1'(x) + u_2'y_2'(x)$ ⑦

即有 $\begin{cases} u_1'y_1(x) + u_2'y_2(x) = 0 \\ u_1'y_1'(x) + u_2'y_2'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$

解得 u_1', u_2' 积分得 u_1, u_2 代入齐次方程的通解

即得 $Y = (u_1 + C_1)y_1(x) + (u_2 + C_2)y_2(x)$

Ⅲ 线性微分方程组

线性微分方程组的求解建议用矩阵思维

1. 常系数齐次线性微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=Ax \quad , A=(a_{ij})_{n\times n}, \ x=(x_{ij}(t))_{n\times 1}$$

$$\begin{cases} D(\lambda)=|A-\lambda E| \overset{令}{=} 0 \\ (A-\lambda_i E)\xi_i=0 \end{cases} \Rightarrow X=\sum_{i=1}^{n} c_i \xi_i e^{\lambda_i t}$$

※ ① 特征值 λ 为虚数 $z=a+bi$，对应的特征向量 $\xi=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1 i\\ \alpha_2+\beta_2 i\\ \alpha_3+\beta_3 i\end{pmatrix}$

则有 $c\xi e^{\lambda t}=C\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1 i\\ \alpha_2+\beta_2 i\\ \alpha_3+\beta_3 i\end{pmatrix}e^{(a+bi)t}=Ce^{at}\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1 i\\ \alpha_2+\beta_2 i\\ \alpha_3+\beta_3 i\end{pmatrix}\cdot(\cos bt+i\sin bt)$

② 特征值 λ 为 k 重根，即 $(A-\lambda E)^k\xi=0$，可解得 k 个特征向量

记作 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$

$$F_1(t)=C_1\left[\sum_{i=0}^{k-1} t^i (A-\lambda E)^i \xi_i\right]e^{\lambda t}, \quad X=\sum_{i=1}^{k} F_i(t)$$

2. 常系数非齐次线性方程组的解

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f(t), \ A=(a_{ij})_{n\times n}, \ x=(x_{ij}(t))_{n\times 1}$$

(1) 先解对应的齐次线性方程组

$\frac{dx}{dt}=Ax$，解得基本解矩阵 $x(t)$，则 $X=C\cdot X(t)$

(2) 常数变易法求特解矩阵

$\tilde{x} = u(t)X(t)$ 注意区分 $\tilde{x}$, $X(t)$

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{du(t)}{dt} \cdot X(t) + u(t)\frac{dX(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} \cdot X(t) + u(t) \cdot Ax$$

又 $\because \frac{d\tilde{x}}{dt} = Ax + f(t)$ $\therefore X(t) \cdot \frac{du(t)}{dt} = f(t)$

$$\Rightarrow \frac{du(t)}{dt} = X^{-1}(t)f(t) \Rightarrow u(t) = \int X^{-1}(t)f(t)\,dt$$

$$\therefore \tilde{x} = u(t)X(t) = X(t)\int X^{-1}(t)f(t)\,dt$$

综上: $x = cX(t) + \tilde{x} \xlongequal{\text{初值条件 } x(t_0)=x_0} x = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + \tilde{x}$