浙江大学 2015 - 2016 学年 第 2 学期

《大学物理甲》期中考试试卷 B

考生姓名：__________学号：____________所属院系：______________；班内序号：______

考试日期：2016 年 5 月 6 日，考试时间：90 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

题序	填空	计算1	计算2	计算3	计算4	计算5	总 分
得分							
评卷人							

物理常数：

万有引力常数：$G = 6.67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2　地面附近的重力加速度：$g = 9.8$ N/kg

光在真空中的速度：$c = 3.00\times10^8$ m/s　电子静止质量 $m_e = 9.11\times10^{-31}$kg

一. **填空题：（40分，每题5分）**（结果最多保留3位有效数字，相对论的速度以真空中的光速做单位）

1. 质点沿半径 R 轨道作圆周运动，初始质点静止，角加速度 $\beta= bt^2$，则在时刻 $t = t_0$ 时质点的切向加速度的大小等于__________，法向加速度的大小等于__________。

解：t_0 时的角速度 $\omega = \int_0^{t_0} \beta dt = \frac{1}{3}\beta t_0{}^3$

切向加速度：$a_t = R\beta = Rbt_0{}^2$

法向加速度：$a_n = R\omega^2 = \frac{1}{9}Rb^2t_0{}^6$

2. 质量为 m 的质点沿 x 正方向运动，初始时刻质点经过原点且速度 $v_0 = 5$ m/s，已知加速度与位置的关系是 $a = 2x$（SI），则质点到达 $x = 10$m 时质点的速度 $v =$________ 。

解：由 $\frac{dv}{dt} = a$　得 $v\frac{dv}{dx} = 2x$　$vdv = 2xdx$

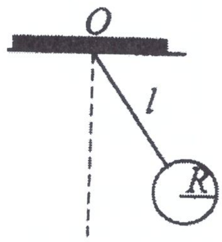
得 $v^2 = v_0{}^2 + x^2$　，　$v = 15$ m/s

解：物体受到的力 $F = ma = 2mx$, F 做的功 $A = \int_0^x F dx = 100m$ （SI）

$$\frac{1}{2}mv^2 = \mathrm{A} + \frac{1}{2}mv_0{}^2$$

$v = 15$ m/s

3. 如图所示，一质量不计的轻杆的一端固定一质量为m、半径为R的均匀圆环，杆沿直径方向，杆的另一端可以绕通过固定点O的轴转动，从而使整个装置在圆环所在的竖直平面内转动。已知杆长l，圆环绕O轴的转动惯量为________________________，振动的周期为______________。



解： （1）转动惯量 $J = mR^2 + m(R+l)^2$

(2) 振动周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mg(R+l)}} = 2\pi\sqrt{\frac{mR^2 + m(R+l)^2}{mg(R+l)}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^2 + (R+l)^2}{g(R+l)}}$$

4. 如图所示，细杆长为 L, 质量线密度为 $\lambda = kx$, 式中 k 为正常量，则此杆对通过O点并与杆垂直的轴的转动惯量为________________，质心离开O点的距离 x_c = ______________。

解： 转动惯量：$J = \int x^2 dm = \int_0^L x^2 \lambda dx = \int_0^L x^2 kx dx = k\int_0^L x^3 dx = \frac{1}{4}kL^4$

$$质心：x_c = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int_0^L x\lambda dx}{\int_0^L \lambda dx} = \frac{k\int_0^L x^2 dx}{k\int_0^L x dx} = \frac{\frac{1}{3}kL^3}{\frac{1}{2}kL^2} = \frac{2}{3}L$$

5. 一列火车鸣笛通过一车站，站在月台上的人测得火车鸣笛的频率由驶近的4000Hz变为远离时的3950Hz ，已知空气中声波的速度是340m/s, 则火车的速度是 ____________。

解：设火车鸣笛的频率为ν，速度为v，根据多普勒效应：

驶近的频率 $\nu_2 = \dfrac{u}{u-v}\nu$ 和 驶离的频率 $\nu_1 = \dfrac{u}{u+v}\nu$

得到 $v = 2.14$ m/s

6. 一竖直悬挂的弹簧，当挂上质量为 8 克物体后，其伸长量为 2.45 cm；现将该物体由平衡位置向上压缩 1.0 cm，并给予向上的初速度 50 cm/s，则物体振动的表达式为（设坐标向上为正方向）$x=$____________________。

解： $k = \dfrac{mg}{l} = 3.2N/m$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20rad/s$$

$$A = \sqrt{x_0^{\ 2} + (v_0/\omega)^2} = 0.027m$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{-v_0}{\omega x_0} = -0.38\pi$$

$$x = 0.027\cos(20t - 0.38\pi)$$

7. 电子的速度为 $v = 2\times10^8$ m/s，电子的动能为__________J，与电子总能量相同的光子的动量等于 __________ kg·m/s。

解：(1) 电子的动能 $E_k = mc^2 - m_0c^2 = (\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1)m_0c^2 = 2.80\times10^{-14}$J

(2) 光子能量即电子总能为 $E = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

光子的动量 $p = E/c = 3.67\times10^{-22}$ kg·m/s

8. 某地发生2次雷击的时间间隔是3s，宇宙飞船观察到的时间间隔是5s，则飞船的速度为__________，飞船测量这2次雷击的空间间隔是__________。

解：某地发生2次雷击的时间间隔 3s 是原时，

$$5s = \frac{3s}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

得 $u = 0.8c$

根据洛仑兹变换，$\Delta x' = \dfrac{\Delta x + u\Delta t}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = 4c = 1.2\times 10^9 m$

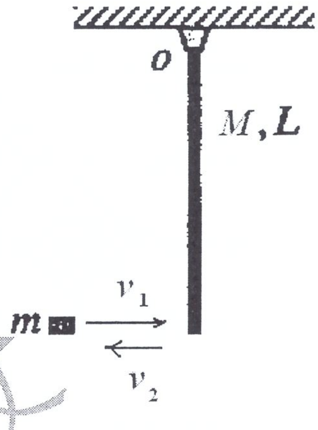
二、计算题

1. (15分)　一质量为M 长度为L 的均匀细棒，可绕通过其一端的光滑轴O 在垂直平面内转动，开始静止在垂直平面。今有一质量为m的物体以水平速度 v_1 击中棒的下端，然后以 v_2 的速度弹回，假定碰撞时间极短。试求:

(1) 碰撞后瞬间棒的转动角速度 ω;

(2) 碰撞以后棒向右转过的最大角度θ_m（假定$\theta_m < \pi/2$）;

(3) 在$\theta = \theta_m/2$ 处，棒的角加速度 β 和轴O对棒提供的作用力。



解：1. 角动量守恒　　（5分）

$$mv_1L = J\omega - mv_2L$$

$$J = \frac{1}{3}ML^2$$

得　$$\omega = \frac{m(v_1+v_2)L}{J} = \frac{3m(v_1+v_2)}{ML}$$

2. 机械能守恒。棒升到θ_m 角位置　　（5分）

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}MgL(1-\cos\theta_m)$$

$$\cos\theta_m = 1 - \frac{3m^2(v_1+v_2)^2}{gM^2L}$$

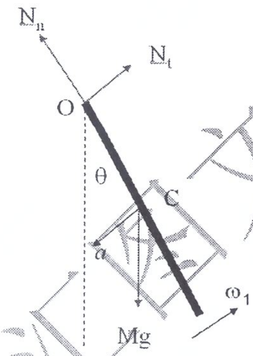
$$\theta_m = \cos^{-1}\left[1 - \frac{3m^2(v_1+v_2)^2}{gM^2L}\right]$$

3. 在 $\theta = \theta_m/2$处，杆受重力Mg外假设轴提供切向 N_t 和法向 N_n 的力，如图。

转动定律:

$$-Mg\frac{L}{2}\sin\theta = J\beta$$

得 $$\beta = -\frac{3g\sin\theta}{2L}$$



由机械能守恒，此时角速度ω_1为

$$\frac{1}{2}MgL(1-\cos\theta_m) = \frac{1}{2}MgL(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}J\omega_1^{\ 2}$$

得

$$\omega_1^{\ 2} = \frac{3g}{L}(\cos\theta - \cos\theta_m)$$

由质心的运动定律。得

$$N_n - Mg\cos\theta = Mv_c^2/(L/2)$$

$$Mg\sin\theta - N_t = Ma_c$$

和　$v_c = \omega_1 L/2$, $a_c = -\beta L/2$　可以求得

$$N_n = Mg\cos\theta + \frac{3}{2}Mg(\cos\theta - \cos\theta_m)$$

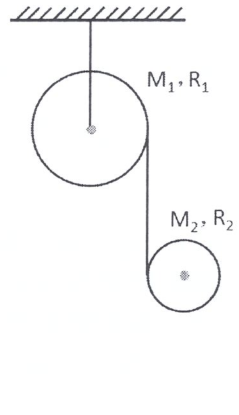
$$N_t = \frac{1}{4}Mg\sin\theta$$　（5分，如果具体代入更好）

2、（12分）一定滑轮是半径为R_1质量为M_1的均质圆盘，边缘绕有细绳，绳的另一端绕在半径为R_2质量为M_2的动滑轮上，动滑轮可以松开细绳下落。假设细绳始终保持竖直，求：

（1）定滑轮的角加速度；

（2）动滑轮的加速度；

（3）连接动滑轮和定滑轮的细绳中的张力。



解：设绳中的张力 T

$$TR_2 = J_2\beta_2$$
$$TR_1 = J_1\beta_1$$
$$M_2 g - T = M_2 a_2$$
$$a_2 = \beta_1 R_1 + \beta_2 R_2 \,,$$ （每式2分，共12分）
$$J_1 = \frac{1}{2}M_1 R_1^2$$
$$J_2 = \frac{1}{2}M_2 R_2^2$$

$$\boldsymbol{\beta_1 = \left(\frac{2M_2}{2M_2 + 3M_1}\right)\frac{g}{R_1}}$$

解得 $$\boldsymbol{a_2 = 2\left(\frac{M_1 + M_2}{2M_2 + 3M_1}\right)g}$$

$$\boldsymbol{T = \frac{M_1 M_2 g}{2M_2 + 3M_1}}$$

3、(12分)（1）一宇宙飞船相对某遥远的恒星以0.8c的速度前进，在运动方向上向前发射一枚相对飞船的速度为0.5c的火箭，求恒星上测得的火箭的速度。
（2）一个静止质量为m_0运动速度为0.6c的小球与另一个静止质量为$2m_0$运动速度为0的小球发生完全非弹性正碰撞，求碰后粘合体的静止质量和运动速度。

解：（1）选地球为K系，宇宙飞船为K′系，K′系的速度 u = 0.8c

$$v_x = \frac{v_x' + u}{1 + v_x' u / c^2} = 0.929c$$ （4分）

（2） 碰前的运动速度v_0 = 0.6c. 设碰后粘合体的静止质量为 M_0和运动速度v, 碰撞过程动量和能量守恒

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - {v_0}^2 / c^2}} v_0 = \frac{M_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} v$$ （3分）

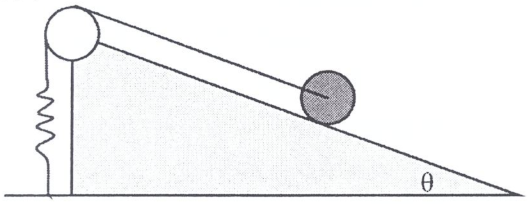
$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - {v_0}^2 / c^2}} c^2 + 2m_0 c^2 = \frac{M_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} c^2$$ （3分）

得： $$M_0 = \sqrt{10} m_0 = 3.16 m_0$$

$$v = \frac{3c}{13} = 0.231c$$ （2分）

4、(13分) 弹性系数为 k 的轻弹簧通过定滑轮（可看成质量m, 半径 R 的圆环）挂在质量为 $4m$ 半径为 R 的匀质圆柱体的对称轴上使之沿斜面作无滑动的滚动，斜面的角度为θ。计算：
（1）振动平衡位置弹簧的伸长量；

（2）求圆柱体的质心作简谐振动的角频率。



解：（1）平衡位置就是受力平衡的位置

$4mg\sin\theta = kx_0$，此时弹簧伸长 $x_0 = 4mg\sin\theta/k$ （2分）

(2)假设某一时刻，弹簧在平衡位置的基础上伸长x，圆柱体同时下滑x，设平衡位置的重力势能为0，我们有

方法1. 振动过程机械能守恒，

$$\frac{1}{2}4mv^2+\frac{1}{2}\left(\frac{4mR^2}{2}\right)\omega^2-4mgx\sin\theta+\frac{1}{2}(mR^2)\omega^2+\frac{1}{2}k(x_0+x)^2=const$$ （4分）

因为 $v = R\omega$

$$\frac{7}{2}mv^2-4mgx\sin\theta+\frac{1}{2}k(x_0+x)^2=const$$ （2分）

对时间求一阶导数

$$7mva-4mgv\sin\theta+k(x_0+x)v=0$$ （2分）

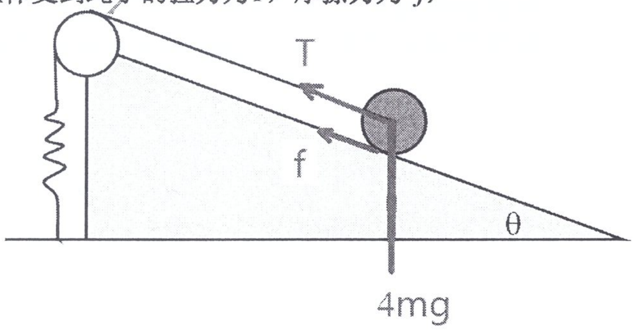
因为 $4mg\sin\theta = kx_0$，所以有

$$7m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$$ （2分）

这是振动的动力学方程，角频率是

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{7m}}$$ （1分）

方法2. 受力分析，设圆柱体受到绳子的拉力为T，摩擦力为 f，



关于定滑轮有： $TR-k(x+x_0)R=J_1\beta_1$

对于圆柱体有：

$$4mg\sin\theta - T - f = 4ma$$

$$fR = J_2\beta \qquad （6分）$$

和约束条件：

$$a = R\beta = R\beta_1$$

和已知

$$J_1 = mR^2$$

$$J_2 = 2mR^2$$

得

$$4\text{mg}\sin\theta - k(x + x_0) = 7ma \qquad （2分）$$

因为 $4mg\sin\theta = kx_0$，所以有

$$7m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \qquad （2分）$$

这是振动的动力学方程，角频率是

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{7m}} \qquad （1分）$$

5. （8 分）已知入射波在坐标原点 O 的振动方程是 $y = 2\cos(4\pi t)$，在 $x = 12$ 的 A 点发生反射，反射波与入射波的振幅相同。这里 x、y 以 m 为单位，t 以 s 为单位，波的传播速度为 $u = 10\text{m/s}$。已知 A 是节点，求波长和反射波的波动方程。

解：振动角频率 $\omega = 4\pi$，波长 $\lambda = 2\pi u/\omega = 5\text{m}$

反射波相位落后　$2\pi*2x/\lambda + \pi = 2\pi*2*12/5 + \pi = 10.6\pi$

反射波的波动方程 $y = 2\cos(4\pi t + 0.4\pi x - 0.6\pi)$